WATAD.me
موقع وتـد التعليمي

الرائع في الرياضيات

التفاضل والتكامل المصفوفات

الفصل الأول

الأستاذ حمزة حامد أبو هيض

الفرعي الأدبي والشرعي - المنهـاج الفلسطيـني

الرائع في الرياضيات - الأستاذ حمزة أبو هيض

الأدبي والشرعي - المنهاج الفلسطيني

WATAD.me
موقع وتـد التعليمي

الأستـاذ حمزة أبـو هيـض
رياضيات توجيهي فلسطين

tchmza

تواصـل مـع الأستـاذ
افتح الكـاميرا وقم بمسح الكود

الوحدة الاولى

التفاضل والتكامل

الدرس الأول متوسط التغير

تعريف

إذا كان : ص = ق(س) وتغيرت

س من س١ إلى س٢

فإن : التغير في قيمة س = س٢ - س١

ويرمز له بالرمز Δ س (دلتا سين)

التغير في قيمة ص = ص٢ - ص١

= ق(س٢) - ق(س١) ويرمز له

بالرمز Δ ص .

مثال

أجد التغير في س عندما تتغير قيمة س من س١ = ١

إلى س٢ = ٤ .

الحل

س١ = ١ ، س٢ = ٤

القانون : Δ س = س٢ - س١

ومنه Δ س = ٤ - ١ = ٣

قيمة تغير س = ٣

مثال

إذا كان ص = ق(س) = ٥ - ٢ س^{٢}

وكانت س١ = ١ ، Δ س = ٢

الحل

Δ س = س٢ - س١

٢ = س٢ - ١

ومنه س٢ = ٣

Δ ص = ق(س٢) - ق(س١)

= ق(٣) - ق(١)

= (٥ - ٢(٣)^{٢}) - (٥ - ٢(١)^{٢})

= ١٣- - ٣ = ١٦-

مثال

أجد متوسط التغير في ق(س) = ٦ - ٢ س

عندما تتغير قيمة س من س١ = ٠ إلى س٢ = ٣ .

الحل

Δ س = س٢ - س١

= ٣ - ٠ = ٣

Δ ص = ق(س٢) - ق(س١)

= ق(٣) - ق(٠)

= (٦ - ٢(٣)) - (٦ - ٢(٠))

= ٦ - ٠ = ٦-

تعريف

إذا كان : ق(س) اقترانًا وتغيرت س

من س١ إلى س٢

فإن : متوسط التغير للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

ومنه $\frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ ، س١ ≠ س٢

مثال

أجد متوسط التغير في الأقتران ق(س)=س^{٢} + ٥

الاقتران : ق(س) = س^{٢} + ٥

عندما تتغير قيمة س [٣ ، ٥].

الحل

ق(٣) = (٣)^{٢} + ٥ = ١٤

ق(٥) = (٥)^{٢} + ٥ = ٣٠

متوسط التغير للاقتران

$$= \frac{ص_{٢}-ص_{١}}{س_{٢}-س_{١}} = \frac{ق(٥)-ق(٣)}{٥-٣}$$

$$= \frac{٣٠-١٤}{٢} = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

الحياة التى لا نخضعها للبحث والدراسة لا نستحق أن نعيشها

ملاحظات هامة

- الفترة : [س$_{١}$ ، س$_{٢}$].
- النقطة : [س ، ص].
- ميل القاطع = متوسط التغير
- متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

أمثلة متنوعة

١ إذا كانت س$_{١}$ = ٤ وكانت س$_{٢}$ = ٩

جد التغير في س.

الحل

Δ س = س$_{٢}$ - س نعوض ....

Δ س = ٩ - ٤ = ٥

---

٢ إذا كانت س$_{١}$ = -٦ وكانت س$_{٢}$ = ١٣

جد التغير في س.

الحل

Δ س = س$_{٢}$ - س

Δ س = ١٣ - -٦

= ١٣ + ٦ = ١٩

---

٣ إذا كانت س$_{١}$ = ٣ وكانت Δ س = ١١

جد التغير في س$_{٢}$

الحل

Δ س = س$_{٢}$ - س

Δ س = س$_{٢}$ - ٣

س$_{٢}$ = ١١ + ٣ = ١٩

س$_{٢}$ = ١٤

٤ إذا كانت ق(س) = ٣س − ٢ جد التغير في ص إذا تغيرت س من س١ = ٣ إلى س٢ = ٨

الحل

Δص = ص٢ − ص١

ص١ = ق(س١) = ق(٣) = ٣ × ٣ − ٢ = ٧

ص٢ = ق(س٢) = ق(٨) = ٣ × ٨ − ٢ = ٢٢

Δص = ص٢ − ص١ = ٢٢ − ٧ = ١٥

لا نتوب عن أحلامنا
مهما تكرر انكسارها

٥ احسب متوسط التغير الذى يمر بالنقطتين أ (١، ٢) ، ب (٣، ١٠)

الحل

احسب متوسط التغير

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{١٠ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٨}{٢} = ٤$

---

٦ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) الذى يمر بالنقطتين

أ (−٤، ٦) ، ب (٢، ٠)

فما متوسط التغير للاقتران ق(س)

الحل

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٠ - ٦}{٢ - (-٤)} = \frac{-٦}{٦} = -١$

---

٧ إذا كان ق(س) = س^٢ + ٢

احسب متوسط التغير إذا تغيرت س من س١ = ١ إلى س٢ = ٤

الحل

متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{[٢ + ٢(٤)] - [٢ + ٢(١)]}{٤ - ١}$

$= \frac{١٨ - ٣}{٤ - ١} = \frac{١٥}{٣} = ٥$

---

٨ إذا كان هـ (س) = ٢ (ق(س)) + ٤ وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) على [٣ ، ٧] يساوى ١٠ ، أجد متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها

الحل

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣}$

= ١٠

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣}$

$= \frac{[٤ + ٢(ق(٧))] - [٤ + ٢(ق(٣))]}{٧ - ٣}$

= ٢٠

٩ إذا كان وكان متوسط التغير للاقتران ق(س)

على الفترة [٤ ، ٨] يساوى ١٢ ، احسب

قيمة ق(٨) ، علمًا بأن ق(ج) = ٢٢

الحل

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$١٢ = \frac{ق(٨) - ق(٤)}{٨ - ٤}$

$١٢ = \frac{ق(٨) - ٢٢}{٨ - ٤}$ (ضرب تبادلين)

ق(٨) - ٢٢ = ٤٨

+ ٢٢ + ٢٢

ق(٨) = ٧٠

واجب

١ أجد متوسط التغير للاقتران ق(س)

عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٥$

علمًا بإن ق(س) = $س^٢ + ٥$

.....

.....

.....

.....

٢ أجد متوسط التغير للاقتران

ق(س) = أ $س^٢ - ٥س$ فى [١ ، ٣]

يساوى - ٩ أجد قيمة الثابت أ

.....

.....

.....

.....

الدرس الثانى المشتقة الأولى

قاعدة ١

إذا كانت ص = ق(س) = أ

حيث أ عدد حقيقى فإن :

ق(س) = $\frac{د ص}{د س}$ = صفر

يعنى مشتقة الثابت = صفر

قاعدة ٢

إذا كانت ص = أ س + ب ، حيث أن أ ، ب

عددان حقيقيان ، فإن : ص = $\frac{د ص}{د س}$ = أ

يعنى ق(س) = أ س + ب

ق(س) = أ

قاعدة ٣

إذا كانت ق(س) = س^{ن} ، فإن :

ق(س) = ن س$^{ن-١}$ ، حيث ن ، حيث :

ن عدد حقيقي

ن ≠ صفر

س ≠ صفر

أمثلة

جد مشتقة كل مما يلي :

١) ق(س) = ٩

ق`(س) = صفر

---

٢) ق(س) = ـ١٢

ق`(س) = صفر

---

٣) ص = $\frac{١}{٢}$

ص` = صفر

---

٤) ص = ٦س

ص` = ٦

---

٥) ق(س) = ـ٨س

ق`(س) = ـ٨

---

٦) ٣ص = ـ٩س

نجهز ص = ـ٣س

ص` = ـ٣

---

٧) ص = ٢س^{٦} ـ ٦

ص` = ٢

---

٨) ص = ـ٦س^{١٢} ـ

$\frac{د ص}{د س}$ = ـ٦

---

٩) ق(س) = ٣س^{٢}

ق`(س) = ٢ × ٣س$^{٢-١}$

= ٦س^{١} = ٦س

---

١٠) ص = ٢س^{٣} ـ ٣ =

$\frac{د ص}{د س}$ = ـ٣ × ٣س$^{٣-١}$

$\frac{د ص}{د س}$ = ـ٦س^{٤}

---

١١) هـ(س) = $\frac{٢}{س^{٢}}$ هـ(س) = ـ٢س$^{-٢}$

تذكر : $\frac{١}{س^{أ}}$ ١ × س^{أ}

هـ(س) = ٢س$^{-٢}$

هـ`(س) = ـ٤س$^{-٣}$

---

١٢) ل(س) = $\sqrt[٤]{س^{٥}}$

ل(س) = س$^{\frac{٥}{٤}}$

ن(س) = $\frac{٥}{٤}$ س$^{\frac{١}{٤}}$

تذكر : $\sqrt[أ]{س^{ب}}$ = س$^{\frac{ب}{أ}}$

١٣ $ق(س) = ٣س^{٤} + \frac{١}{س^{٣}}$

$ق(س) = ٣س^{٤} + س^{-٣}$

$ق'(س) = ١٢س^{٣} + -٣س^{-٤}$

$= ١٢س^{٣} - ٣س^{-٤}$

---

١٤ $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$

$ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$

$= \frac{\frac{٢}{٣}}{\sqrt[٣]{س}}$

---

١٥ إذا كانت ص = ٦س^{٢} ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل

$\frac{دص}{دس} = ١٢س$

الان نعوض ١ في $\frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = ١٢ \times (١) = ١٢$

س = ١

---

١٦ إذا كان هـ(س) = ٥ ، ق(س) ، ق(٦) = -١

ما قيمة هـ'(٦) = ؟؟؟؟

الحل

هـ'(٦) = ٥ ق$^{-}$(س)

هـ'(٦) = ٥ × -١

هـ'(٦) = -٥

---

١٧ إذا كان ق(س) = ب $\sqrt{س}$

ق'(١) = ١٢ ، جد قيمة الثابت ب ؟

الحل

ق'(س) = ب × س$^{\frac{١}{٢}}$ (نجهز)

ق'(س) = $\frac{١}{٢}$ب س$^{-\frac{١}{٢}}$

ق'(١) = $\frac{١}{٢}$ب × (١)$^{-\frac{١}{٢}}$

١٢ = $\frac{١}{٢}$ب × ١ (ضرب الطرفين بـ ٢)

ب = ٢٤

---

١٨ إذا كان ص = ٦ ق(س) ، ق(٠) = ٧

أجد قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٥

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٦ ق'(س)$

$\frac{دص}{دس} = ٦ ق'(٥)$

س = ٥ = ٦ × ٧ = ٤٢

واجب

١ جد مشتقة كل مما يلي :

أ هـ(س) = ٦ $\sqrt{س}$

.....

.....

.....

ب) ك(س) = $\frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

.....

.....

.....

.....

جـ) ص = (١,٠٠٤)^{٦}

.....

.....

.....

.....

٢) إذا كان و(س) = أ س^{٥} وكان و(٢) = ٨٠

جد قيمة الثابت أ ؟

.....

.....

.....

.....

وإن ليس للإنسان إلا ما سعى

وإن سعيه سوف يرى

الدرس الثالث قواعد الاشتقاق

إذا كان و(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن :

١ مشتقة الجمع والطرح :

م(س) = و(س) ± هـ(س)

فإن : م`(س) = و`(س) ± هـ`(س)

مثال

ك(س) = ٤س^{٢} ، م(س) = ٦س

جد (ك + م)`(س) ؟

(ك + م) (س) = ٤س^{٢} + ٦س

(ك + م)`(س) = ٨س + ٦

إذا كان و(س) = $\sqrt{س}$ وكان هـ(س) = ٣س^{٢}

جد (و − هـ)`(س) ؟ عند س = ١

الحل

(و + هـ) (س) = $\sqrt{س}$ − ٣س^{٤}

(و + هـ)`(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{-١}{٢}}$ − ١٢س^{٣}

= $\frac{١}{٢}$ − ١٢

= $\frac{-٢٣}{٢}$

٢ مشتقة الضرب :

(ق × هـ)َ (س) =

ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

مثال

أجد قَ(س) حيث

ق(س) = (٢س + ١) (س٢) عند س = ١

الحل

قَ(س) = (٢س + ١) (٢س) + (س٢) (٢)

= ٤ (١)٢ + ٢ (١) + ٢ (١)٢

= ٤ + ٢ + ٢ = ٨

مثال

إذا كان ق(س) = (٣س٢ + ٤س)(٧ − ٤س)

فإن قَ(٢) .

الحل

قَ(س) =

الأول × مشتقة الثاني + مشتقة الأول × الثاني

قَ(س) =

(٣س٢ + ٤س)(− ٤) + (٦س + ٤)(٧ − ٤س)

معه قَ(٢) =

(٣(٢)٢ + ٤(٢)) + (٦(٢) + ٤)(٧ − ٤)(٢)

قَ(٢) = ٨٠ + − ١٦ = − ٩٦

٣ مشتقة القسمة :

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ(س) ≠ ٠

عند س = أ فإن : $(\frac{ق}{هـ})'(أ) =$

$$(أ) = \frac{(هـ(أ) \times ق'(أ)) - (ق(أ) \times هـ'(أ))}{(هـ(أ))^{٢}}$$

بإختصار :

$$(\frac{ق}{هـ})'(أ) = \frac{\text{الثاني} \times \text{مشتقة الأول} - \text{الأول} \times \text{مشتقة الثاني}}{\text{المقام التربيع}}$$

الأول : البسط

الثاني : المقام

مثال

إذا كان ك(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ وكان ق(١٠) = ٢

وكان قَ(١٠) = − ٣ ، هـ(١٠) = − ٢ ، هـَ(١٠) = ١٧

أجد ك (١٠) = ؟؟

الحل

مشتق ك(س) : مشتقة قسمة

$$ك'(س) = \frac{هـ \times ق' - ق \times هـ'}{هـ^{٢}}$$

نعوض الآن .....

$$ك'(١٠) = \frac{(- ٢ \times - ٢) - (١٧ \times ٢)}{٤}$$

$$= \frac{- ٢٨}{٤} = - ٧$$

أمثلة متنوعة

جد المشتقة لكل مما يأتي عند قيمة س المعطاة :

١ ق(س) = ٣س^{٢} − ٢ ، عند س = ٣

الحل

ق'(س) = ٦س ، نعوض الآن

ق'(٣) = ٦ × ٣ = ١٨

---

٢ ق(س) = س^{٦} + ٢س ، عند س = ٢

الحل

ق'(س) = ٦س^{٥} + ٢ ، نعوض الآن

ق'(٢) = ٦(٢)^{٥} + ٢ = ١٨

= ١٩٢ + ٢ = ١٩٤

---

٣ ق(س) = $\frac{-٣}{س^{٣}}$ + $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، جد ق(١) ؟؟؟

الحل

نجهز ق(س) = −٣س$^{-٣}$ + س$^{\frac{٢}{٣}}$

ق'(س) = ٩(١)$^{-٤}$ + $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{-١}{٣}}$ نعوض الآن

ق'(١) = ٩(١)$^{-٤}$ + $\frac{٢}{٣}$ (١)$^{\frac{-١}{٣}}$

ق'(١) = ٩ × ١ + $\frac{٢}{٣}$ = ٩ + $\frac{٢}{٣}$

= $\frac{٢٧}{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢٩}{٣}$

إذا كانت ص = ٣ ق(س) ، ق'(٩) = −٢

س = ٩ ، أجد $\frac{دص}{دس}$ ؟؟؟

الحل

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ق'(س) ، نعوض الآن

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ق'(٩) ، س = ٩

= ٣ × −٢ = −٦

إذا كانت ٢ص = ٤ ق(س) ، ق(٤) = −٦

، جد $\frac{دص}{دس}$ ؟ س = ٤

الحل

نجهز ، نشتق الطرفين على ٢

$\frac{٢}{٢}$ ص = $\frac{٤}{٢}$ ق(س)

ص = ٢ق(س)

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ق'(س) ، نعوض الآن

$\frac{دص}{دس}$ ، س = ٤

= ٢ × −٦ = −١٢

بسم الله نبدأ وبسم الله نستمر

وبسم الله نصل لما نريد

إذا كانت ق(س) = ٢س^{٣} + حـ س

وكان ق`(١) = ١٢ ، جد قيمة حـ ؟

الحل

ق`(س) = ٦س + حـ

ق`(١) = ٦(١) + حـ

١٢ = ٦ + حـ

٦- ٦-

حـ = ٦

استخدم الجدول الآتي لإيجاد قيمة كلاً مما يلي:

ق(٣)	ق`(٣)	حـ(٣)	هـ`(٣)
٣	٢-	٢	٤

١ (٢ ق + هـ)`(٣)

= ٢ ق`(٣) + هـ`(٣)

= ٢ × ٢- + ٤ = ٠

٢ (ق + هـ)`(٣)

= ق`(٣) × هـ(٣) + هـ`(٣) + ق(٣)

= (٢- × ٢) + (٤ × ٣)

= ٤- + ١٢ = ٨

٣ $\left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right)$`(٣)

$= \frac{(هـ \times ق^{-} - (ق \times هـ^{-})}{هـ^{٢}}$

$= \frac{(٢ \times ٢-) - (٤ \times ٣)}{٤}$

$= \frac{-٤ - ١٢}{٤} = -٤$

إذا كانت ص = (٢س^{٣} - ٦س) (٣ - ٢س)

، جد $\frac{دص}{دس}$ ؟ س = ١

الحل

$\frac{دص}{دس} = (٢س^{٣} - ٦س \times -٢) + (-٣ ٢س)(٦س - ٦)$

$\frac{دص}{دس} = (٢(١)^{٣} - ٦(١))(-٢ + (٣ - ٢(١))(٦ - ٦)$

$\frac{دص}{دس} = (٢ - ٦)(-٢) + ٠$

$= (-٤)(-٢) = ٨$

إذا كانت ق(س) = $\frac{٣س - ٤}{٢س - ٤}$

، جد قيمة ق`(-٢) ؟

الحل

$ق`(س) = \frac{(٢س - ٤)(-٣) - (-٤ - ٣س)(٢)}{(٢س - ٤)^{٢}}$

$ق`(-٢) = \frac{(٢(-٢) - ٤)(-٣) - (-٤ - ٣س)(٢)}{(٢س - ٤)^{٢}}$

$ق`(-٢) = \frac{(-٤ - ٤)(-٣) - (-٤ - ٦)(٢)}{(-٤ - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٨ \times -٣ - (-٤ - ٦)(٢)}{-٢٨}$

$= \frac{-٢٤ - -٤}{-٨^{٢}} = \frac{٢٨}{٦٤}$

مثال

إذا كانت ق(س) = أ س^{٣} + ٢ س + ب

وكان ق$'$(١) = ٥ ، علمًا بأن الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٢ ، −٣) فما قيمة الثابتين أ ، ب

الحل

ق$'$(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢

ق$'$(١) = ٣ أ (١)^{٢} + ٢

٥ = ٣ أ + ٢

٣ أ = ٥ − ٢

$\frac{٣ أ}{٣} = \frac{٣}{٣}$ أ = ١

نعوض الان النقطة (٢ ، −٣)

ق(٢) = ١ (٢)^{٣} + ٢ (٢) + ب

−٣ = ٨ + ٤ + ب

−٣ = ١٢ + ب

ب = −١٥

ملحوظة

تم تعويض قيمة أ مع النقطة في ق(س) قبل الاشتقاق

واجب

إذا كانت ق(س) = $\frac{أ س - ٥}{٦ - ٤ س}$

ق$'$(١) = $(\frac{-١}{٢})$ ، جد قيمة الثابت أ ؟ أ = ٥

.....

.....

.....

.....

الدرس الرابع القيم القصوى للاقتران

قاعدة

إذا كان : ق(س) اقتران معرف على الفترة [أ ، ب] ، فإن : ق(س) :

١) متزايدًا ، إذا كانت إشارة ق$'$(س) > ٠

٢) متناقصًا ، إذا كانت إشارة ق$'$(س) < ٠

٣) ثابتًا ، إذا كانت إشارة ق$'$(س) = ٠

الحل

١) أولاً نجد ق$'$(س) (نشتق)

٢) نساوى ق$'$(س) بالصفر

ق$'$(س) = الصفر

٣) نستخرج قيم س من حل المعادلة .

٤ نبحث إشارة ق`(س)

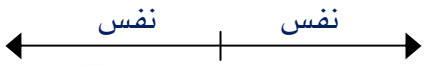
إذا كانت ق`(س) اقتران خطي (له صفر واحد)

فإن :

إذا كانت ق`(س) اقتران تربيعي (له صفرين)

اقتران تربيعي (له صفر واحد)

فإن :



٥ نحدد فترات التزايد والتناقص

٦ نحدد القيم القصوى (عظمى أو صغرى)

وذلك بالتعويض في ق(س) الأصلي .

مثال

إذا كانت ق(س) = س^{٢} – ٢س + ٣

جد :

١ فترات التزايد والتناقص .

٢ القيم القصوى أن وجدت .

الحل

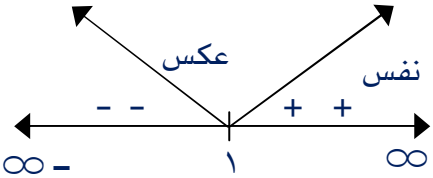
نشتق : ق`(س) = ٢س – ٢

نساوي بالصفر

٢س – ٢ = ٠

٢س = ٢

س = ١



١ ق(س) متزايد عند] ∞- ، ١ [

ق(س) متناقص عند] ١ ، ∞ [

٢ يوجد قيمة صغرى ألا وهي ق(١)

ق(١) = (١)^{٢} – ٢(١) + ٣

= ١ – ٢ + ٣ = ٢

مثال

اجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = س^{٢} – ٤س – ٧

الحل

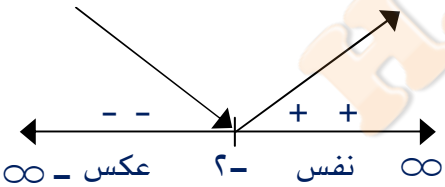
نجد ق(س)

ق`(س) = ٢س + ٤

ق`(س) = صفر

٢س + ٤ = ٠

س = -٢



ق(س) متزايد على الفترة] -٢ ، ∞ [

ق(س) متناقص على الفترة] ∞- ، -٢ [

مثال

أجد القيمة القصوى المحلية للاقتران

هـ(س) = س^{٣} – ٢٧س، إن وجدت وأحدد نوعها

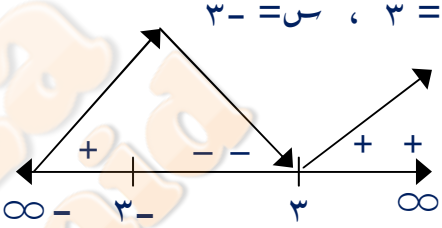
الحل

هـ`(س) = ٣س^{٢} – ٢٧

٣س^{٢} – ٢٧ = صفر

(س–٣) (س+٣) = ٠

س = ٣ ، س= -٣



للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند

س= -٣ وقيمتها هـ(-٣) = ٥٤

وقيمة صغرى محلية عند س= ٣

وقيمتها هـ(٣) = -٥٤

مثال

إذا كانت : ن(س) = (س + ٤) (-٢س – ٤)

جد : ١ فترات التزايد والتناقص .

٢ القيم القصوى المحلية .

الحل

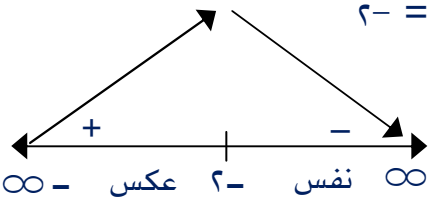
ن`(س)= ((-٢س – ٤) (١)) +(س+٢) (-٢)

ن`(س)= -٢س – ٤ – ٢س – ٤

ن`(س)= -٤س – ٨

-٤س – ٨ = صفر

س = -٢



١ ن(س) متزايد على الفترة]-∞ ، -٢ [

ومتناقص على الفترة]-٢ ، ∞ [

٢ يوجد قيمة عظمى محلية وهى (-٢)

ن(-٢) = (-٢-٢) (-٢ (-٢) (-٤)= صفر

مثال

احدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢س^{٢} – ٥س – ٥

والقيم القصوى إن وجدت واحدد نوعها .

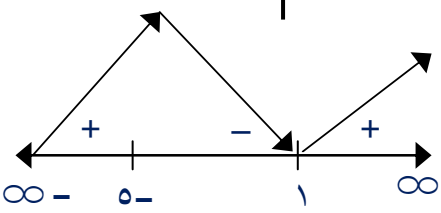
الحل

ك`(س) = س^{٢} + ٤س – ٥ = صفر

(س+٥) (س–١) = صفر

س+٥ = ٠ | س–١ = ٠

س= -٥ | س= +١



١ ك(س) متزايد على الفترة]-∞ ، -٥ [

ومتناقص على الفترة] -٥ ، ∞ [

(٢) يوجد قيمة عظمى محلية وهى :

ك(ـ٥) = $\frac{١}{٣}$ × ـ١٢٥ + ٥٠ـ + ٢٥ ـ ٥ = $\frac{١٥٥-}{٣}$

لاتقطن من النجاح لعثرة
وما لا ينال اليوم يدرك فى الغد

سؤال : بين أنه لا يوجد للاقتران

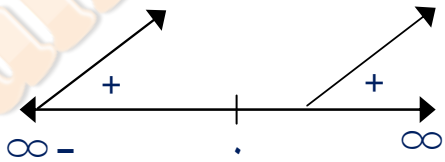
ع(س) = ٢س^{٣} + ٣ ، قيم القصوى ؟

الحل

ع`(س) = ٦س^{٢} ٦س^{٢} = صفر

س = صفر

إقتران تربيعى له صفر واحد



لايوجد قيم قصوى للاقتران بسبب عدم تغير سلوك الاقتران حول الصفر

واجب

ما قيمة الثابت حـ فى الاقتران

ق(س) = ٥ ـ حـ س ـ س^{٢} التى تجعل ق(٢)

قيمة عظمى محلية .

الحل

ق`(س) = ـ حـ ـ ٢س

ق`(٢) = ـ حـ ـ ٤(٢) = صفر

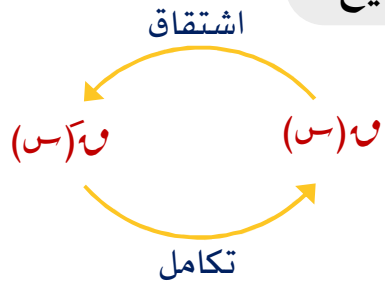
ـ حـ = ٤ حـ = ـ ٤

الدرس الخامس التكامل الغير محدود

إن الشعوب بطبيعة حالها توجد مستقلة ما إن يتم احتلالها فتحاول الاستقلال من جديد للحرية وكذلك التكامل هى عملية عكسية للتفاضل ....

ق(س) اقتران بعد اشتقاقه يصبح ق`(س) مشتقة نستعين بالتكامل للرجوع للاقتران ق(س)

توضيح



مثلاً

س^{٢} + أى عدد ← (اشتقاق) ٢س

س^{٢} + أى عدد → (تكامل) ٢س

أى عدد ← نضع مكانها الثابت حـ

رمز عملية التكامل ∫

٤س^{٢} + ٢ ← (اشتقاق) ٨س

٤س^{٢} + ١٠ ← (اشتقاق) ٨س

٤س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ← (اشتقاق) ٨س

ولكن عند تكامل ٨س

٨س ← (تكامل) ٤س^{٢} + حـ

نضع الثابت حـ ليعبر عن العدد الغير محدد بعد التكامل

$\int و'(س)\,وس = و(س) + ح$

وس ← للدلالة على أن الاقتران تم اشتقاقه نسبة لـ س وسيتم تكامل نسبة لـ س

قواعد التكامل الغير محدود :

١) $\int ١ . وس = ١س + ح$

٢) $\int س^{ن} وس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ح$

(حيث ن ، ح عددان حقيقيان)

٣) $\int [و(س) \pm هـ(س)] = \int و + \int هـ$

٤) $\int ك \times و(س) وس = ك \int و(س)$

جد التكاملات الآتية :

١) $\int ٣ وس = ٣س + ح$

٢) $\int \frac{١}{٢} وس = \frac{١}{٢} س + ح$

٣) $\int -١ وس = -١س + ح$

٤) $\int (٠,٣)^{٢} وس = (٠,٣)^{٢} س + ح$

٥) $\int س وس = \frac{س^{٢}}{٢} + ح$

٦) $\int س^{٢} وس = \frac{س^{٣}}{٣} + ح$

٧) $\int ٢س وس = ٢\int س وس$

$= ٢\frac{س^{٢}}{٢} + ح$

٨) $\int ٤س^{٣} وس = \frac{٤}{٤} س^{٤} + ح$

$= س^{٤} + ح$

٩) $\int -٥س^{٤} وس = \frac{-٥}{٥} س^{٥} + ح$

$= -س^{٥} + ح$

١٠) $\int -٢س^{-٣} وس = \frac{-٢س^{-٢}}{-٢} + ح$

$= س^{-٢} + ح$

١١) $\int \sqrt{س} وس = س^{\frac{١}{٢}} وس$

$= \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}} + ح$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ح$

١٢) $\int \sqrt[٣]{س^{٢}} وس = \int س^{\frac{٢}{٣}} وس$

$= \frac{س^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{١}{٢}} + ح$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٣}{٢}} + ح$

١٣) $\int \frac{-٢}{س^{٤}} وس = \int -٢س^{-٤} وس$

$= \frac{-٢س^{-٣}}{-٣} + ح = \frac{٢}{٣} س^{-٤} + ح$

١٤) $\int (٢س + س^{٢}) وس$

$= \int ٢س وس + \int س^{٢} وس$

$= ٢س^{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} + ح$

١٥) $\int (٣س^{٢} - س + ح) وس$

$= \int ٣س^{٢} وس - \int س وس + \int ١ وس$

$= س^{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + س + ح$

(١٦) $\int (س^{٣} + س)\, وس$

$= \int س^{٣}\, وس + \int س\, وس$

$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + ح$

(١٧) $\int (س^{٤} + \sqrt{س})\, وس$

$= \int س^{٤}\, وس - \int \sqrt{س}\, وس$

$= \frac{س^{٥}}{٥} + \int س^{\frac{١}{٢}}\, وس$

$= \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ح$

(١٨) $\int (س^{-٣} + س^{-٥})\, وس$

$= \int س^{-٣}\, وس + \int س^{-٥}\, وس$

$= \frac{س^{-٢}}{-٢} + \frac{س^{-٤}}{-٤} + ح$

$= \frac{-١}{٢س^{٢}} + \frac{-١}{٤س^{٤}} + ح$

من جد وجد

ومن سار على الدرب وصل

اختبر نفسك

(١) $\int (\frac{١}{س^{٢}} + ٥)\, وس$

.....

.....

.....

.....

(٢) $\int س^{\frac{٥}{٢}}\, وس$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(٣) $\int \sqrt[٧]{س}\, وس$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(٤) $\int (٢س^{٣} + س^{٢} + س - ١)\, وس$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال

جد التكامل الآتي :

(١) $\int (3\sqrt{س} - 9)\ د س$

الحل

نجهز .. $\int (3 س^{\frac{1}{2}} - 9)\ د س$

$= \frac{3 س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 9 س + ح$

$= \frac{2}{3} \times 3 س^{\frac{3}{2}} - 9 س + ح$

$= 2 س^{\frac{3}{2}} - 9 س + ح = 2 س^{\frac{3}{2}} - 9 س + ح$

جد التكاملات الآتية :

(١) $\int (3 س^2 + 4 س + 5)\ د س$

$= \frac{3 س^3}{3} + \frac{4 س^3}{2} - 5 س + ح$

$= س^3 + 2 س^2 + 5 س + ح$

(٢) $\int (6 س^{-4} + \frac{2}{5 س^2})\ د س$

$\int (6 س^{-4} + \frac{2}{5} س^{-2})\ د س$

$= \frac{6 س^{-3}}{-3} + \frac{2}{5} \frac{س^{-1}}{-1} + ح$

$= -2 س^{-3} + \frac{-2}{5} س^{-1} + ح$

(٣) $\int (56 س^3 + 7 س^2 + 3 س)\ د س$

$\frac{56 س^4}{4} + \frac{7 س^3}{3} + \frac{3 س^2}{3} + ح$

$= 14 س^4 + \frac{7}{3} س^3 + \frac{3}{2} س^2 + ح$

لا يمكن تحقيق النجاح
إلا إذا أحببت ما تقوم به

(٤) $\int (5)^{4002}\ د س$

$= (5)^{4002} س + ح$ (لأنه ثابت)

إذا كان $ق(س) = \int (س^5 - 4 س^3 + 8)$

أجد $ق'(1)$ ؟

الحل

نشتق الطرفين وعند اشتقاق التكامل الغير محدود يلغى التكامل فقط .

$ق'(س) = س^5 - 4 س^3 + 8$

$ق'(1) = (1)^5 - 4(1)^3 + 8$

$= 1 - 4 + 8 = 5$

إذا كان $\int ق'(س) = 3 س^2 - 3 س^2 + ح$

أجد $ق'(س)$

الحل

نشتق الطرفين يلغى التكامل

$ق'(س) = 6 س + 2$

واجب

إذا كانت $ص = \int (3 س^2 + 2 س)\ د س$

أجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

.....

.....

.....

الدرس السادس التكامل محدود

القاعدة

$\int_{أ}^{ب} و'(س)\,د س = و(س)\Big|_{أ}^{ب}$

$= و(ب) - و(أ)$ ، $أ ، ب \in ح$

ملاحظات

(١) قيمة التكامل المحدود = عدد ثابت

(٢) مشتقة التكامل المحدود = صفر

مثال

جد قيمة التكامل الآتي :

$\int_{١}^{٢} (٣س + ١)\,د س$

الحل

$= \frac{٣س^{٢}}{٢} + س \Big|_{١}^{٢}$ نعوض الآن

$= (\frac{٣(٢)^{٢}}{٢} + (٢)) - (\frac{٣(١)^{٢}}{٢} + (١))$

$= (٦ + ٢) - \frac{٥}{٢}$

$= ٨ - \frac{٥}{٢} = \frac{١١}{٢}$

جد قيمة التكامل الآتي :

(١) $\int_{-١}^{١} (٦س^{٢} + ٧)\,د س$

الحل

$= \frac{٦س^{٣}}{٣} + ٧س \Big|_{-١}^{١}$

$= ٢س^{٣} + ٧س \Big|_{-١}^{١}$

$= [٢(١)^{٣} + ٧(١)] - [٢(-١)^{٣} + ٧(-١)]$

$= ٩ - ٩- = ٩ + ٩ = ١٨$

(٢) $\int_{١}^{٣} (٤ + ٢س)\,د س$

الحل

$= ٤س - \frac{٢س^{٢}}{٢} \Big|_{١}^{٣}$

$= ٤س - س^{٢} \Big|_{١}^{٣}$

$= [٤(٣) - (٣)^{٢}] - [٤(١) - (-١)^{٢}]$

$= ٣ - ٣ =$ صفر

همة حتى القمة

(٣) $\int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + ٣)\,د س$

الحل

نجهز $\int_{١}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + ٩)\,د س$

$= \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ٣س \Big|_{١}^{٤}$

$= [\frac{٢}{٣}(٤^{\frac{٣}{٢}}) + ٣(٤)] - [\frac{٢}{٣}(١^{\frac{٣}{٢}}) + ٣(١)]$

$= \frac{٥٢}{٣} - \frac{١١}{٣} = \frac{٤١}{٣}$

٤) $\int_{1}^{2} (٤س + ٦س^{٢}) \, دس$

الحل

$= [\frac{٤س^{٢}}{٢} - \frac{٦س^{٣}}{٣}]_{١}^{٢}$

$= [٢س^{٢} - ٢س^{٣}]_{١}^{٢}$

$= [٢(٢)^{٢} - ٢(٢)^{٣}] - [٢(٠)^{٢} - ٢(٠)^{٣}]$

$= ٨ - ١٦ - ٠ = -٨$

إذا كان $\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣) \, دس = ٩٠$

جد قيمة الثابت ب ؟

الحل

تكامل ....

$= [\frac{٤س^{٢}}{٢} + ٣س]_{ب}^{٦} = ٩٠$

$= [٢(٦)^{٢} + ٣(٦)] - [٢(ب)^{٢} - ٣(ب)]$

$= ٩٠ - ٢ب^{٢} - ٣ب = ٩٠$

$= -٢ب^{٢} - ٣ب = صفر$

$= ب(-٢ب - ٣) = صفر$

$ب = ٠$ أو $-٢ب - ٣ = صفر$

$ب = \frac{-٣}{٢}$

إذا كان $\int_{٣}^{٥} (٢س + ب) \, دس = ١٢$

جد قيمة الثابت ب ؟

الحل

تكامل ....

$= [\frac{٢س^{٢}}{٢} + بس]_{٣}^{٥} = ١٢$

$= [٥^{٢} + ب(٥)] - [٣^{٢} + ب(٣)] = ١٢$

$= ٢٥ - ٥ب - ٩ - ٣ب = ١٢$

$= ١٦ - ٢ب = ١٢$

$= \frac{-٤}{٢} = \frac{-٢ب}{٢}$

$ب = -٢$

اختبر نفسك

إذا كان $\int_{-١}^{حـ} ٦س \, دس = صفر$

جد قيمة الثابت حـ ؟

.....

.....

.....

.....

.....

خصائص التكامل المحدود

١) $\int_{أ}^{أ} ق(س) \, دس = صفر$ ، أ عدد حقيقي

مثال

جد قيمة التكاملات الآتية :

(١) $\int_{1}^{4} (٢س + ١)\, وس$

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢} + س\right]_{1}^{4}$

$= [٤^{٢} + ٤] - [٢^{٢} + ٢]$

$= ٦ - ٦ =$ صفر

$\int_{4}^{4} (س^{٢} + ٣)\, وس =$ صفر

.....

.....

.....

.....

(٢) $\int_{1}^{ب} و(س) وس = - \int_{1}^{ب} و(س) وس$

مثال

إذا كان : $\int_{1}^{4} و(س) وس = ٩$

فإن : $\int_{4}^{1} و(س) وس = -٩$

سؤال

إذا كان : $\int_{1}^{٢} و(س) وس = ٣$

فإن : $\int_{٢}^{1} (٢و(س) + ٧)\, وس =$

الحل

$\int_{٢}^{1} (٢و(س) + ٧)\, وس =$ نوزع التكامل

$= \int_{٢}^{1} ٢و(س) وس + \int_{٢}^{1} ٧\, وس$

$= ٢\int_{٢}^{1} و(س) وس + \int_{٢}^{1} ٧\, وس$

$= ٢ \times -٣ + ٧ س |_{٢}^{1}$

$= -٦ + [٧ + (١)] - [٧ (٢)]$

$= -٦ + -٧$

$= -١٣$

جميع خواص التكامل غير المحدود تنطبق على التكامل المحدود

إذا كان $\int_{1}^{٥} ٣هـ (س) وس = ١٢$

ما قيمة $\int_{٥}^{1} (هـ + ٢س - ١)\, وس$

الحل

نجهز

$\int_{1}^{٥} \frac{٣}{٣} هـ (س) وس = \frac{١٢}{٣}$

$= \int_{1}^{٥} هـ (س) وس = ٤$ (١)

$= \int_{٥}^{1} هـ (س) + ٢س - ١)\, وس$ نوزع التكامل

$= \int_{٥}^{1} هـ (س) وس + \int_{٥}^{1} ٢س\, وس - \int_{٥}^{1} ١\, وس$

$= -٤ + (\frac{٢س^{٢}}{٢} - س |_{١}^{٥})$

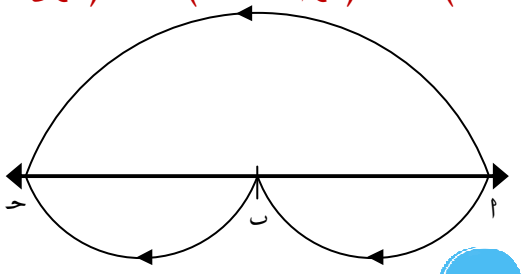
$= -٤ + ([١^{٢} - ١] - [٥^{٢} + ٥])$

$= -٤ - ٢٠ = -٢٤$

خاصية الإضافة

$ل_{ا}^{ح}(س)و(س) =$

$و(س)س(ل_{ا}^{ب} + و(س)س(ل_{ب}^{ح}$



مثال

$ل_{-٣}^{٢}(س)و(س) = ١٢، ل_{٢}^{٦}(س)و(س) = ٤$

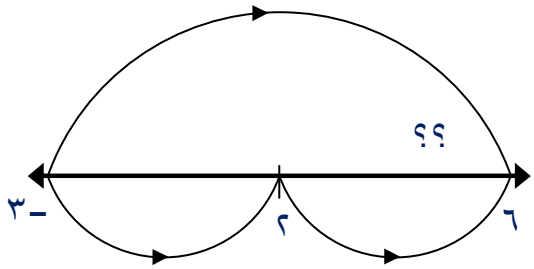
فما قيمة $ل_{-٣}^{٦}(س)و(س)$ ؟

الحل

$= ٥ ل_{-٣}^{٦}(س)و(س)$

$= ٥ ل_{-٣}^{٢}(س)و(س) + ل_{٢}^{٦}(س)و(س)$

رتبنا الحدود من خلال



$= ٥ × (٢ + ٤) = ٣٠$

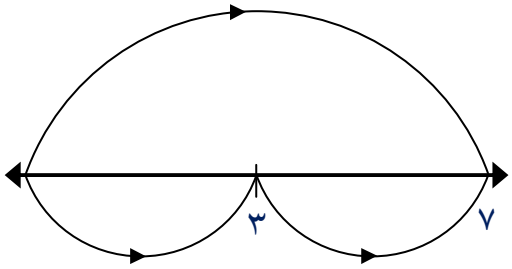
إذا كان $ل_{٢}^{٧}(س)و(س) = ٣$

وكان $ل_{٣}^{٧}(س)و(س) = -٩$

فما قيمة $ل_{٢}^{٣}(س)و(س)$ ؟

الحل

نجهز



$ل_{٣}^{٧}(س)و(س) = \frac{-٩}{٣}$

الآن

$= ٤ × ل_{٢}^{٣}(س)و(س)$

$= ٤ × (ل_{٢}^{٧}(س)و(س) + ل_{٧}^{٣}(س)و(س)$

$= ٤ × (٣ + ٣)$

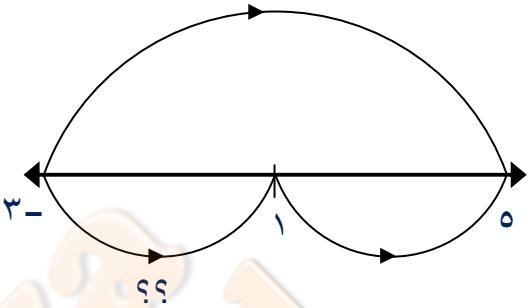
$= ٢٤$

إذا كان $ل_{١}^{٥}$ ن(س) و س = ٣

وكان $ل_{-٣}^{٥}$ ن(س) و س = -٤

فما قيمة $ل_{١}^{-٣}$ ٤ ن(س) و س ؟

الحل



$ل_{١}^{-٣}$ ن(س) و س =

$ل_{-٣}^{١}$ ن(س) و س = $-$

$ل_{-٣}^{٥}$ ن(س) و س $-$ $ل_{١}^{٥}$ ن(س) و س = $-$ ( )

= $-$ (-٤ $-$ ٣)

= ٧

اختبر نفسك

(١) إذا كان $ل_{٥}^{٧}$ ن(س) و س = ٦

وكان $ل_{٥}^{١}$ ن(س) و س = ٤

فما قيمة $ل_{١}^{٧}$ (٣ ن(س) + ٢) و س ؟

.....

.....

.....

(٢) إذا كان $ل_{٣}^{٢}$ ٧ هـ(س) و س = -١٤

أوجد $ل_{٣}^{٢}$ (هـ (س) + ٢ س) و س ؟

.....

.....

.....

.....

تم بحمد الله الوحدة الأولى

Hamza H. Abuhaid

Hamza
H. Abuhaid

Hamza
H. Abuhaid

الوحدة الثانية

المصفوفات

الوحدة الثانية المصفوفات

تعريف

هى تنظيم مستطيل الشكل لإعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها (ن) محصورة بين قوسين من نوع [ ] ويرمز لها بأحد حروف اللغة العربية (الهجائية) وتكون المصفوفة من رتبة م × ن .

مثال

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٦ \\ & & \\ ٤ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٩ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٥ \\ ٦ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$حـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad س = [\ ٦ \quad ٥ \quad ٤\ ]$$

مثال

لدينا المصفوفة

$$هـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة هـ = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

= ٢ × ٣

هـ$_{٢١}$ = مدخلة فى الصف الأول والعمود الثانى

= ٦

هـ$_{٣٢}$ = مدخلة فى الصف الثانى والعمود الثالث = ١

مثال

إذا كانت ر = $\begin{bmatrix} -٢ & ٧ \\ ٩ & ٣ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$

جد :

١ رتبة المصفوفة ر ؟

٢ ما قيمة كل من المدخلات الآتية ؟

ر$_{٢١}$ ، ر$_{١٢}$ ، ر$_{٢٣}$

٣ أُسمِ المدخلة التى قيمتها ٣ فى المصفوفة ر ؟

الحل

١ رتبة المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

= ٣ × ٢

٢ المدخلة ر$_{٢١}$ = ٧ ، ر$_{١٢}$ = ٩ ، ر$_{٢٣}$ = -٨

٣ المدخلة التى تساوى ٣ هى ر$_{٢٢}$

ملاحظات

رتبة المصفوفة لا يتم إيجاد ناتجها يعنى

(أ$_{٣×٢}$ ≠ أ$_{٦}$) تبقى الرتبة كما هى أ$_{٣×٢}$

المدخلات هى الأعداد الحقيقية التى توجد داخل المصفوفة .

مثلاً

إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ ٩ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$

جد ما يلي :

١ رتبة المصفوفة س ؟

رتبة المصفوفة س = ٣ × ٣

٢ جد القيمة المدخلات س٢١ / س٣٢ / س٢٣

س٢١ = ٢ / س٣٢ = ٥ / س٢٣ = ٧

٣ أسُم المدخلة ٩ / ٣ / ٧

٩ = س١٣ / ٣ = س٢٢ / ٧ = س٣٣

اختبر نفسك

إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٦ & ٩ \\ ٤ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$

جد ما يلي :

١ رتبة المصفوفة أ ؟

٢ جد القيمة المدخلات أ٣١ / أ٢٢ / أ١١

٣ أسُم المدخلة -٢ / -٦ / ٤

أنواع المصفوفات :

مصفوفة الصف : تكون من صف واحد وعدة أعمدة

مثل ، [٧ ٣ ٢ ١]

رتبها ١ × ن ، ن عدد الأعمدة

مصفوفة الأعمدة : تكون من عمود واحد وعدة صفوف

مثل

$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{bmatrix}$ رتبها م × ١ ، م عدد الصفوف

مصفوفة المربعة : عدد صفوفها = عدد أعمدتها

مثل

$\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٧ & ٨ \\ ٣ & ٢ & ٩ \end{bmatrix}$

مصفوفة الصفرية : جمع مدخلاتها اصفار ويرمز لها بالرمز (و)

مثل

و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

مصفوفة الوحدة : هى مصفوفة التى تكون مدخلات قطرها الرئيسى = ١ وباقى المدخلات صفر ويرمز لها بالرمز (م)

مثل

م٢ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، م٣ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ملاحظة

أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ليست مصفوفات الوحدة

تساوى المصفوفات :

تساوى المصفوفات إذا كان لهما :

(١) نفس الترتيب .

(٢) نفس قيم المدخلات .

مثلاً

$$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

المصفوفتين متساويتين بالترتيب ولهما نفس قيم المدخلات .

مثال

ابين فيما إذا كانت المصفوفتان متساويتان أم لا ؟

$$س = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad ص = [٤ \; ٥ \; ٦]$$

المصفوفتين غير متساويتين ، لأن الرتبة غير متساوية .

رتبة ٣ × ١ ≠ رتبة ١ × ٣

وما توفيقي إلا بالله .....

مثال

إذا كانت أ = [٤ س + ٢] ، ب = [٤ ٩-]

فما قيمة س التي تجعل أ = ب ؟

الحل

بما أن : [٤ س + ٢] = [٤ ٩-]

فإن : س + ٢ = ٩- ($أ_{٢١} = ب_{٢١}$)

ونحل المعادلة الآن :

س + ٢ = ٩- ، س = ١١-

٢ − ٢ −

مثال

إذا كانت : أ ب

$$\begin{bmatrix} س^{٢} & ص+١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

جد قيمة س و ص ؟

الحل

بما أن المصفوفتان متساويتان فإن :

- $س^{٢} = ٤$ ($أ_{١١} = ب_{١١}$)

  $س^{٢} = ٤$ ، $س = \pm ٢$

- ص + ١ = ٣ ($أ_{٢١} = ب_{٢١}$)

  ص + ١ = ٣ ، ص = ٢

  ١ − ١ −

- ٤ = س + ٢ ($أ_{٢٢} = ب_{٢٢}$)

  ٤ = س + ٢ ، س = ٢

  ٢ − ٢ −

  ص = ٢ ، س = ٢

إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٩ \\ ٨ & ٥ & ب^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & حـ^{٢} \\ ٨ & ٥ & ب \end{bmatrix}$$

جد قيمة ب و حـ ؟

الحل

$٩ = حـ^{٢}$ $\quad$ $حـ = \pm ٣$

$ب^{٢} = ب$ $\quad$ $ب^{٢} - ب = ٠$

$ب (ب - ١) = ٠$

$ب = ٠$ أو $ب = ١$

إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} س+٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ س+ص & ٥ \end{bmatrix}$$

جد قيمة س و ص ؟

الحل

$س + ٣ = ٤$ $\quad$ $س = ١$

$- ٣ \quad - ٣$

$٥ = س + ص$ نعوض قيمة $س = ١$

$٥ = ١ + ص$ $\quad$ $ص = ٤$

لا يليق بنا الاستلام

أما أن نصل أو نصل .....

اختبر نفسك

١ إذا كانت : $\begin{bmatrix} أ \\ ٧ \\ -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ أ + ب \\ ب - حـ \end{bmatrix}$

جد قيمة أ ، ب ، حـ ؟

.....

٢ إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ - ٣ب \\ حـ + ب \end{bmatrix}$

جد قيمة ب ، حـ ؟

.....

إذا كانت : $[-١ \quad ٣ \quad س] = [-١ \quad ص + س \quad ٢]$

جد قيمة س و ص ؟

الحل

$س = ٢$

$٣ = ص + س$ نعوض قيمة $س = ٢$

$٣ = ص + ٢$

$- ٢ \quad - ٢$

$ص = ١$

الدرس الثاني العمليات على المصفوفات

أولاً : الجمع والطرح :

ملاحظة

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين لكل منهما نفس الرتبة م × ن فبذلك يكون مجموع المصفوفتين أ + ب = حـ حيث تكون حـ ن النفس الرتبة م × ن

عند جمع أو طرح مصفوفتين يتم جمع أو طرح المدخلات المتناظرة معًا .

أي أن : حـ$_{س ص}$ = أ$_{س ص}$ + ب$_{س ص}$

مثال

إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ & ٢ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٣- & ٤- \\ ٥ & ٩- \end{bmatrix}$$

فإن :

رتبة أ : ٢ × ٣

رتبة ب : ٢ × ٢

هل يمكن إجراء عملية جمع أو طرح ؟

مثال

إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

جد أ + ب إذا أمكن :

الحل

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٢+٢ & ١+٠ \\ ٣-+١ & ٤+٣ \end{bmatrix}$$

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix}$$

مثال

إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ١ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

جد :

١ أ + ب ٢ ب + أ

الحل

١ $$أ + ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٤+٧ & ٦+٥ & ٩+٢ \\ ٦+٦ & ٣+٤ & ١-+١ \end{bmatrix}$$

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ١١ & ١١ & ١١ \\ ١٢ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

٢ $$ب + أ = \begin{bmatrix} ٤+٧ & ٦+٥ & ٩+٢ \\ ٦+٦ & ٣+٤ & ١-+١ \end{bmatrix}$$

$$ب + أ = \begin{bmatrix} ١١ & ١١ & ١١ \\ ١٢ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

ملاحظة

عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية

أ + ب = ب + أ

مثال

إذا كان :

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{ع} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

جد ع + (س + ص) =

الحل

ع + (س + ص) = (س + ص) + ع

$$(\text{س} + \text{ص}) = \begin{bmatrix} ٣+٢ & ٢+٣ \\ ٠+٤ & ٣+١ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} + \text{ص} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$(\text{س} + \text{ص}) + \text{ع} = \begin{bmatrix} ٥+١ & ٣+٠ \\ ٣+٧ & ٣+٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ١٠ \end{bmatrix}$$

اختبر نفسك

س + (ص + ع) = ؟؟؟؟؟

ماذا تستنتج ؟؟؟

.....

.....

ملاحظة

عملية جمع المصفوفات عملية تجمعية

إذا كانت :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ١٠ & -٤ & ٦ \end{bmatrix} \quad \text{و}_{٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

جد : أ + و٣

الحل

$$\text{أ} + \text{و} = \begin{bmatrix} ٠+٦ & ٠+٤ & ٠+٢ \\ ٠+١٠ & ٠-٤+٠ & ٠+٦ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ١٠ & -٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

اختبر نفسك

و + أ ؟ ماذا تلاحظ

ملاحظة

المصفوفة الصفرية (و) هى المصفوفة المحايدة لعملية الجمع بالمصفوفات

يارب قل لاحلامنا
كونى فتكون .....

ملاحظة

إذا طلب السؤال جمع المصفوفة مع نفسها ٣ مرات (أ + أ + أ) فإن الحالة تكون ٣ × أ

إذا كان :

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٢- \\ ١- & ٦ & ٤- \end{bmatrix}$$

جد أ + أ + أ

الحل

نضرب المصفوفة بـ ٣

أ + أ + أ =

$$\begin{bmatrix} ٢+٢+٢ & ٤+٤+٤ & ٢-+٢-+٢- \\ ١-+١-+١- & ٦+٦+٦ & ٤-+٤-+٤- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ١٢ & ٦- \\ ٣- & ١٨ & ١٢- \end{bmatrix}$$

عندما نضرب المصفوفة بـ ٣

$$= \begin{bmatrix} ٣\times٢ & ٣\times٤ & ٣\times٢- \\ ٣\times١- & ٣\times٦ & ٣\times٤- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ١٢ & ٦- \\ ٣- & ١٨ & ١٢- \end{bmatrix}$$

اختبر نفسك

إذا كان س = $\begin{bmatrix} ٩- & ٢- & ٤- \\ ٦ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

جد ٢ س ، - ٣ س

سؤال إذا كان :

س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ص = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٣ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$

جد :

١ ٧ س ٢ $\frac{٣}{٥}$ ص

الحل

١ ٧ س = $\begin{bmatrix} ٧\times٦ & ٧\times٥ & ٧\times٤ & ٧\times٣ \\ ٧\times١ & ٧\times٤ & ٧\times٧ & ٧\times١ \end{bmatrix}$

٧ س = $\begin{bmatrix} ٤٢ & ٣٥ & ٢٨ & ٢١ \\ ٧ & ٢٨ & ٤٩ & ٧ \end{bmatrix}$

٢ $\frac{٣}{٥}$ ص = $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٥}\times٦ & \frac{٣}{٥}\times١ & \frac{٣}{٥}\times٠ \\ \frac{٣}{٥}\times٤ & \frac{٣}{٥}\times٨ & \frac{٣}{٥}\times٣ \end{bmatrix}$

$\frac{٣}{٥}$ ص = $\begin{bmatrix} \frac{١٨}{٥} & \frac{٣}{٥} & ٠ \\ \frac{١٣}{٥} & \frac{٢٤}{٥} & \frac{٩}{٥} \end{bmatrix}$

اختبر نفسك

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٦- & ٢ \\ ١ & ٢- & ٦ & ٨- \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- & ٤ \\ ٢ & ١ & ١- \end{bmatrix}$

١ $\frac{١}{٢}$ أ ٢ ٣ ب

.....

.....

إذا كانت : $أ_{٢} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$

جد قيمة $أ_{٣}$ ؟

الحل

نجد $أ$ بقسمة المصفوفة على ٢

$$\frac{أ_{٢}}{٢} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٢} & \frac{٤}{٢} \\ \frac{٦}{٢} & \frac{١٠}{٢} \end{bmatrix} \qquad أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

الآن نضرب المصفوفة $أ$ بـ ٣

$$أ_{٣} = \begin{bmatrix} ٣\times٤ & ٣\times٢ \\ ٣\times٣ & ٣\times٥ \end{bmatrix}$$

$$أ_{٣} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ \\ ٩ & ١٥ \end{bmatrix}$$

إذا كانت : $-س = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$

جد قيمة $\frac{١}{٢}$ س ؟

الحل

نتخلص من السالب بقسمة س على -١

$$\frac{-س}{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{-١} & \frac{-١}{-١} \\ \frac{٤}{-١} & \frac{٦}{-١} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & -٦ \end{bmatrix}$$

الآن نضرب المصفوفة س بـ $\frac{١}{٢}$

$$\frac{١}{٢}س = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢}\times٢ & \frac{١}{٢}\times١ \\ -\frac{١}{٢}\times٤ & -\frac{١}{٢}\times٦ \end{bmatrix}$$

$$أ_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$$

طرح المصفوفات

ملاحظة

إذا كان $أ$ ، $ب$ مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن

فإن ناتج طرحهما يساوى نفس الرتبة م × ن

يعنى أن : $أ_{س ص} - ب_{س ص} = حـ_{س ص}$

مثال

إذا كان :

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

جد أ − ب ؟

الحل

$$أ - ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

$$أ - ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$$

ملاحظة

إذا كان أ ، ب مصفوفتين حيث :

أ + ب = ب + أ = و

فإن ب هى النظير الجمعى لـ أ

وتكون ب = − أ

وإن طال ليل الهموم فحتماً
سيأتى الفجر لتشرق شمس أحرمنا

حل المعادلة المصفوفة الآتية :

$$س + ٣ \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

الحل

$$س + \begin{bmatrix} ٣ \times ٥ & ٣ \times ١- \\ ٣ \times ١ & ٣ \times ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} ١٥ & ٣- \\ ٣ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٥ & ٣- \\ ٣ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٧- & ٦ \\ ٢- & ١٦- \end{bmatrix}$$

حل المعادلة المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} - ٢س$$

الحل

نرتب المعادلة

$$٢- س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$٢- س = \begin{bmatrix} ١٠- & ٢- \\ ٢- & ٤ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$$ الآن نقسم على ٢-

$$\frac{٢- س}{٢-} = \begin{bmatrix} \frac{١٠-}{٢-} & \frac{٢-}{٢} \\ \frac{٢-}{٢-} & \frac{٤}{٢-} \\ \frac{٢-}{٢-} & \frac{٠}{٢} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

حل المعادلة المصفوفة الآتية :

$$٣س - \begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

الحل

$$٣س - س = \begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix}$$

$$٢س = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٢ \\ ٢ & ١٢ \end{bmatrix}$$ الآن نقسم على ٢

$$\frac{٢س}{٢} = \begin{bmatrix} \frac{٢٠}{٢} & \frac{٢}{٢} \\ \frac{٢}{٢} & \frac{١٨}{٢} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

حل المعادلة المصفوفة الآتية :

$$٢(س + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}) = ٢س - \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل

$$٢س + \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = س - \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$٢س - س = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -١٠ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٦ & ١٠ \\ -٢ & -١٤ \end{bmatrix}$$

أسئلة إضافية

١ إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

جد قيمة ١٩أ + ١٩ ب - ١٨ (أ + ب)

الحل

نبسط المقدار

١٩أ + ١٩ ب - ١٨ أ - ١٨ ب

= ١أ + ١ ب

$$= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

٢ إذا كانت :

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

جد قيمة ١٤أ + ١٣ ب - ١٠ (أ + ب)

الحل

نبسط المقدار

١٤أ + ١٣ ب - ١٠ أ - ١٠ ب

$$= ٤أ + ٣ ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ٨ \\ ١٦ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٦ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$٤أ + ٣ ب = \begin{bmatrix} ١٥ & ١١ \\ ٢٢ & ١٨ \end{bmatrix}$$

٣ إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} س & -١ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ -٤ & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٦ & ص \end{bmatrix}$$

جد قيمة س ، ص

الحل

نجمع

$$\begin{bmatrix} س & -١ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & س+ص \end{bmatrix}$$

بتساوى المصفوفتين يصبح :

$س = ٣$ $س + ص = ٨$

$٣ + ص = ٨$

$ص = ٥$

واجب

١ إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ١ & ٢س \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ص & ٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

جد قيمة س ، ص

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢ حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$٤س \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٤ & -١ \end{bmatrix} = و$$

.....

.....

.....

.....

ضرب المصفوفات

تعريف

إذا كان أ مصفوفة رتبتها م × ن و

ب مصفوفة رتبتها م × هـ فإن :

$أ_{م×ن} \times ب_{ن×هـ} = حـ_{م×هـ}$

ملاحظة

يجب أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوى عدد صفوف الثانية

مثال

$س_{٢×٣} \times ص_{٣×٥} = ع_{٢×٥}$ ، $أ_{٢×٣} \times ب_{٢×٤} = حـ_{٣×٤}$

مثال

إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

جد أ × ب ؟

الحل

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢×٣+١×١ & ٢×٤+١×٠ \\ -١×٣+٣×١ & -١×٤+٣×٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

مثال

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، حـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ١- \end{bmatrix}$

جد :

١) أ × ب　　٢) أ × حـ

٣) حـ × ب

الحل

١) أ × ب = $\begin{bmatrix} ٥\times٤+٢\times١ & ٥\times٢+٢\times٠ \\ ١\times٤+٣\times١ & ١\times٢+٣\times٠ \end{bmatrix}$

أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢٢ & ١٠ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$

٢) أ × حـ = $\begin{bmatrix} ٥\times٢+٢\times٥ & ٥\times٥+٢\times١- \\ ١\times٢+٣\times٦ & ١\times٥+٣\times١- \end{bmatrix}$

أ × حـ = $\begin{bmatrix} ٢٠ & ٢٣ \\ ٢٠ & ٢ \end{bmatrix}$

٣) حـ × ب = $\begin{bmatrix} ٢\times٤+٥\times١ & ٢\times٢+٥\times٠ \\ ٦\times٤+١-\times١ & ٦\times٢+١-\times٠ \end{bmatrix}$

حـ × ب = $\begin{bmatrix} ١٣ & ٤ \\ ٢٣ & ٢- \end{bmatrix}$

خاصية (١) :

عملية ضرب المصفوفات ليست بديله .

واجب

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$　　ب = $\begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

جد أ × ب

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤) إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$　　ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

جد أ × ب

الحل

لا يمكن إيجاد الناتج لأن :

عدد أعمدة أ ≠ عدد صفوف ب

خواص عملية ضرب المصفوفات :

(١) عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية .

(٢) المحايد الضربي لضرب المصفوفات هو (م)

مصفوفة الوحدة .

(٣) تتوزع عملية الضرب على الجمع

أ × (ب + حـ) = أ × ب + أ × حـ .

(٤) خاصية التجميع تتحقق على عملية الضرب

أ × (ب + حـ) = (أ × ب) × حـ .

(٥) ك (أ × ب) = (ك × أ) × ب = أ × (ك × ب)

الضرب بعدد الحقيقي .

واجب

إذا كانت :

$س = \begin{bmatrix} -٢٢ & -٣٦ \\ ١٤ & ١٢ \end{bmatrix}$ و $= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

جد س × و

.....

.....

.....

.....

.....

ماذا تلاحظ ؟

.....

.....

مثال

إذا كانت :

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ١- \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ٣ \\ ١ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$

جد :

١) أ × ب ٢) $أ^{٢}$ ٣) $أ٢ \times ب$

الحل

١) $أ \times ب = \begin{bmatrix} -٤+٦ & ٣-٦ & -٣+٠ \\ -٨+١٢ & ١+١٢ & ١-+٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ١- \\ ١٢ & ١٣ & ٩- \end{bmatrix}$

٢) $أ^{٢} = أ \times أ$

$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣+٦ & ١٢+٤ \\ ١+١٢ & ١-+٨ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣ & ١٦ \\ ١٢ & ٧ \end{bmatrix}$

٣) $أ٢ \times ب = ٢ (أ \times ب)$

$= ٢ \times \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ١- \\ ١٢ & ١٣ & ٩- \end{bmatrix}$ (حل الفرع الأول)

$= \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٢- \\ ٢٤ & ٢٦ & ١٨- \end{bmatrix}$

جد ناتج ما يلي :

١ إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢- \end{bmatrix}$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٢\times٣+٣\times٣- \\ ٠\times٣+٢\times١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

٢ إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \end{bmatrix}$

الحل

$$= \begin{bmatrix} ٢\times٣ & ٢\times١- & ٣\times٣ \\ ٠\times٣ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٢- & ٠ \end{bmatrix}$$

٣ إذا كانت : $\begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix}$

جد أ ، ب ؟

الحل

نقوم بعملية الضرب

$$= \begin{bmatrix} ١+أ٣ \\ ٦+٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix}$$

$٤ = ١ + أ٣ =$

$٣ = أ٣ =$ $\quad$ $= أ = ١$

$= ٦ + ٣ = ب$ $\quad$ $أ = ٩$

(حسب تساوى المصفوفات)

٤ إذا كانت : $[س \quad ٢] \times \begin{bmatrix} س \\ ١ \end{bmatrix} = [١ \quad -٢س]$

جد س

الحل

نضرب المصفوفين

$$= [س^{٢} + ٢] = [١ \quad -٢س]$$

$س^{٢} + ٢ = ١ - ٢س$ (حسب تساوى المصفوفات)

$س^{٢} + ٢س + ١ = ٠$

$(س + ١)(س + ١) = ٠$

$س = -١$ أو $س = -١$

إذا كان :

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٢ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \quad ب = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

جد :

١ $٥(أ \times ب)$ ٢ $(أ٥) \times ب$

٣ $أ \times (٥ب)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النظير الضربي للمصفوفة :

أولاً : المحددات

تعريف

إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{bmatrix}$ فإن محدد المصفوفة س هي : $|س| = أ \times ء - ب \times حـ$

مثال

٣ جد محدد المصفوفة الآتية :

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل

$|أ| = ٢ \times -١ - ٣ \times ٤$

$|أ| = -٢ - -١٢ = ١٤-$

$ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل

$|ب| = -٢ \times ٤ - ٣ \times ٦$

$|ب| = -٨ - -١٨ = ٢٦-$

وما توفيقي إلا بالله

إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد : ١ |س| ٢ |ص|

٣ |س +ص| ٤ |س -ص|

٥ |س ×ص|

الحل

١ $|س| = ٢ \times -٣ - ١ \times -١ = ٦ + ١ = ٧$

٢ $|ص| = ١ \times -٤ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = ٢-$

٣ $|س+ص| = س + ص$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$

$|س+ص| = ٢ \times ٧ - ١ \times ٤ = ٢١ - ٤ = ١٧$

نلاحظ أن : $|س+ص| \neq |س| + |ص|$

٤ $|س-ص| = س - ص$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$

$|س-ص| = ١ \times -١ - -٣ \times -٢ = ١ - ٦ = ٥-$

نلاحظ أن : $|س-ص| \neq |س| - |ص|$

٥ $|س \times ص| = س \times ص$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٥ & ٩ \end{bmatrix}$

$|س \times ص| = ٤ \times ٩ - ٥ \times ١٠ = ٣٦ - ٥٠ = ١٤-$

نلاحظ أن : $|س \times ص| = |س| \times |ص|$

المصفوفة المنفردة :

هى المصفوفة التى محددها يساوى صفر ،

وليس لها نظير ضربى .

فإن مع العسر يسرًا

إن مع العسر يسرًا

اختبر نفسك

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$

جد ما يأتى : ① |أ| ② |ب|

③ |أ - ب| ④ |أ + ب|

⑤ |أ × ب|

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال

حدد إذا ما كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$

هى مصفوفة منفردة أم لا ؟

الحل

|أ| = ٤ × ٣- - ٦ × ٢-

= ١٢- - ١٢- = ١٢ + ١٢- = صفر

إذن المصفوفة أ هى مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربى

واجب

أى المصفوفات الآتية هى مصفوفة منفردة :

① س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٣- & ٤- \end{bmatrix}$

② ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦- \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$

③ أ = $\begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

قاعدة :

١ إذا كانت أ ن×ن فإن |ك أ| = ك ^ن × |أ|

٢ إذا كانت أ ٣×٣ فإن |ك أ| = ك ^٣ × |أ|

مثال

إذا كانت أ ٢×٢ وكان |أ| = ٢ فإن :

|٣أ| = ٣^٢ × |أ| = ٩ × ٢ = ١٨

|٦أ| = ٦^٢ × |أ| = ٣٦ × ٢ = ٧٢

ما قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ منفردة ؟

الحل

٣ × س − ٤ × ٦ = ٣س − ٢٤

٣س − ٢٤ = صفر (لأنها منفردة)

$\frac{٣س}{٣} \quad \frac{٢٤}{٣}$ س = ٨

إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & س+١ \end{vmatrix}$ = −٤

ما قيمة س ؟

الحل

٢ × (س + ١) − ٤ × ٦ =

٢س + ٢ − ٢٤ = −٤

+ ٢٤ = + ٢٤

٢س + ٢ = ٢٠ $\quad \frac{٢س}{٢} = \frac{١٨}{٢}$

− ٢ = −٢ $\quad$ س = ٩

النظير الضربى :

تعريف

أ مصفوفة غير منفردة من الرتبة (٢) ب

نظير ضربى للمصفوفة أ .

إذا كان : أ × ب = ب × أ = م^٢

أ × أ^-١ = أ^-١ × أ = م^٢

ملاحظة

المصفوفة التى لها نظير ضربى هى الغير منفردة

ومحددها ≠ صفر .

$أ = \begin{bmatrix} س & ع \\ ص & ل \end{bmatrix} \quad أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} = \begin{bmatrix} ل & -ع \\ -ص & س \end{bmatrix}$

مثال

جد النظير الضربى للمصفوفة التالية أن امكن

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$

|أ| = ١ × -٢ − -١ × ٢

= -٢ − -٢ = صفر

ليس لها نظير ضربى لأن محددها = صفر

مثال

جد النظير الضربي للمصفوفة الآتية أن امكن

١) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

الحل

$|أ| = ١ \times ٣ - ١- \times ٢- = ٣ - ٢ = ٥$

$أ^{-١} = \frac{١}{٥} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١-}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$

٢) $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix}$

$|ب| = ٤ \times ١- - ٠ \times ٢- = ٤-$

$ب^{-١} = \frac{١}{|ب|} \times \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ١- \end{bmatrix}$

واجب

أوجد النظير الضربي لكل من مما يأتي أن امكن :

١) $س = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$ ٢) $ص = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات هامة

١) $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = م$

٢) $(أب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$

٣) $(أبحـ)^{-١} = حـ^{-١} \times ب^{-١} \times أ^{-١}$

٤) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

٥) $(كأ)^{-١} = \frac{١}{ك} \times أ^{-١}$ ، ك ثابت

٦) $|أ \times أ^{-١}| = |أ^{-١}| \times |أ| = |م| = ١$

٧) $(أ+ب)^{-١} \neq أ^{-١}+ب^{-١}$

٨) $(أ-ب)^{-١} \neq أ^{-١}-ب^{-١}$

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ أجد :

(أ-١)٢

الحل

أ٢ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

|أ٢| = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

= ٤ × ٦ − ٢ × ١٠ = ٢٤ − ٢٠ = ٤

(أ٢)-١ = $\frac{١}{|أ٢|}\begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -\frac{٥}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

٢(أ)-١ أو ٢أ-١

الحل

|أ| = ٢ × ٣ − ١− × ٥

= ٦ − ٥ = ١

أ-١ = $\frac{١}{|أ|} \times \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

٢أ-١ = ٢ × $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

اختبر بنفسك

١ جد النظير الضربي لكل من :

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

٢ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

جد : (١) (أ٣)-١ (٢) أ٢-١

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

طريقة النظير الضربي .

خطوات الحل :

(١) نرتب المعادلات .

(٢) نكون المعادلة المصفوفية .

(٣) نحصل على النظير الضربي لمصفوفة المعاملات .

(٤) نضرب الطرفين بالنظير الضربي لمصفوفة المعاملات .

مثال

اكتب المعادلة المصفوفية للأنظمة الآتية :

١) ٥ س – ص = ٢

٣ س + ٤ ص = ـ٥

الحل

المعادلات مرتبة

المعادلة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٥ \end{bmatrix}$$

٢) ص + ٢ = س + ص

س = ١٢ – ص

الحل

نرتب المعادلات

ـ س + ٢ص = –٢

س –ص = ١٢

المعادلة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

حل نظام المعادلات الآتى بطريقة النظير الضربى :

١) ٢ س – ص = ـ٧

س + ٢ص = ـ١

الحل

المعادلة المصفوفية هى :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ -١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = ٢ \times ٢ - (-١) \times ١ = ٥$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٥} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ -\frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ -\frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٧ \\ -١ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{١٤}{٥} + \frac{١}{٥} \\ \frac{٧}{٥} + -\frac{٢}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{١٥}{٥} \\ \frac{٥}{٥} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٣ \\ ١ \end{bmatrix}$$

حل المعادلات الآتية مستخدمًا طريقة النظير الضربي:

$٢س + ص = ١$

$س + ٧ = ٢ص$

الحل

نرتب المعادلات

$٢س + ص = ١$

$س - ٢ص = -٧$

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٧ \end{bmatrix}$$

$|أ| = ٢ \times -٢ - ١ \times ١ = -٤ - ١ = -٥$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٥} \times \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{-٥} & \frac{-١}{-٥} \\ \frac{١}{-٥} & \frac{٢}{-٥} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{٢}{-٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} + \frac{٧}{٥} \\ \frac{١}{٥} + \frac{١٤}{-٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{٥}{٥} \\ \frac{١٥}{٥} \end{bmatrix}$$

جد قيمة س ، ص باستخدام طريقة النظير الضربي

$س = ص + ١$

$٢س + ص = ١$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حل المعادلة التالية :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = س \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$$

الحل

$|أ| = (٢ \times -٣) - (-١ \times ٥) = -٦ + ٥ = ١$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -٣ & -١٦ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

طريقة قاعدة كريمر :

تستخدم قاعدة كريمر لحل نظام من معادلتين خطتين بمتغيرين والذى يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتى :

$$أ \times ع = حـ$$

$$|أ| \neq \text{صفر}$$

حيث :

أ : مصفوفة المعاملات .

ع : مصفوفة المتغيرات .

حـ : مصفوفة الثوابت .

فيكون :

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} \ ، \ ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$$

سنكون ما نريد يومًا ما

مثال

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتى :

$$س - ص = ٤$$

$$٥س + ٢ص = ٦$$

الحل

المعادلات مرتبة الآن :

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = ١ \times ٢ - (-١) \times ٥$$

$$= ٢ + ٥ = ٧$$

الآن :

$$|أ_{س}| = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} = ٤ \times ٢ - (-١) \times ٦ = ١٤$$

نستبدل العمود الأول من أ بالثوابت ثم نستخرج المحددة .

$$|أ_{ص}| = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = ١ \times ٦ - ٥ \times ٤ = -١٤$$

نستبدل العمود الثانى من أ بالثوابت .

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٤}{٧} = -٢$$

مثال

استخدم قاعدة كريمر لحل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

الحل

$$|أ| = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = ٣ \times ١ - (-١) \times ٢$$

$$= ٣ + ٢ = ٥$$

$$|أس| = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = ٤ \times -١ - ٣ \times ٢$$

$$= -٤ - ٦ = -١٠$$

$$|أص| = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = ٣ \times ٣ - ١ \times ٤$$

$$= ٩ - ٤ = ٥$$

$$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{-١٠}{٥} = -٢$$

$$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{٥}{٥} = ١$$

تذكر دائمًا ان التعب سيهون
عندما تفرح ناجحًا

مثال

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$س - ٥ = ٢ص - ٤س$$

$$ص + س - ٤ = ٥ + ٣س$$

الحل

نرتب المعادلات

$$-٥س + ٢ص = -٥$$

$$-٢س + ص = ٩$$

الآن: $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = -٥ \times ١ - (-٢) \times ٢$$

$$= -٥ + ٤ = -١$$

$$|أس| = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix} = -٥ \times ١ - (-٢) \times ٢$$

$$= -٥ - ١٨ = -٢٣$$

$$|أص| = \begin{bmatrix} -٥ & -٥ \\ ٩ & -٢ \end{bmatrix} = -٥ \times -٢ - ٩ \times -٥$$

$$= -٤٥ - ١٠ = -٥٥$$

$$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{-٢٣}{-١} = ٢٣$$

$$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{-٥٥}{-١} = ٥٥$$

اختبر بنفسك

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

$٢س - ص = -٥$

$س + ص = ٨$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

عند حل نظام من معادلتين خطتين وجد أن :

$س = -٢$ ، $|أس| = ٤$ ، $|أص| = -٦$

فما قيمة ص ؟

الحل

$$س = \frac{|أس|}{|أ|}$$

$$-٢ = \frac{٤}{|أ|}$$

$$-٢ |أ| = ٤$$

$$|أ| = -٢$$

$$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية ، وكان

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$|أس| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$|أص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{vmatrix}$$

جد قيمة س ، ص ؟

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ١ \times ٤$$

$$= ٢ - ٨ = -٦$$

$$|أس| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix} = ٤ \times ٤ - ١ \times ٩$$

$$= ١٦ - ٩ = ٧$$

$$|أص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{vmatrix} = ٢ \times ٩ - ٤ \times ١$$

$$= ١٨ - ٤ = ١٤$$

$$س = \frac{|أس|}{|أ|} = \frac{٧}{٧} = ١$$

$$ص = \frac{|أص|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$$