WATAD.me

الفصل الدراسي الاول

التفاضل
Differentiation

فلسطين بالقلب

samer rashad

2006

منصة_أوائل_المملكة

المحتـــويات

الوحدة ١

حساب التفاضل Differentiation

١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)

١ - ٢ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

١ - ٣ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)

١ - ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)

١ - ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)

١ - ٦ قاعدة السلسلة (Chain Rule)

١ - ٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

١ متوسط التغيـــر

التعريف :

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$

١. مقدار التغير $\Delta س = س_٢ - س_١$

٢. متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

مثال

$ص = ق(س) = س^٣ - ٥س + ٣$

١. $\Delta س$ عندما تتغير س من -١ إلى ٢

٢. التغير في ق(س) عندما تتغير س من -١ إلى ٢

٣. متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من -١ إلى ٢

$ق(س) = س^٢ + \frac{٣}{س}$

جد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥

$ق(س) = جتا س - ٣ جا س$

جد متوسط تغير ق(س) في الفترة $\left[\pi ، \frac{\pi}{٢}\right]$

مثال

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} [س - ١] ، س \geq ٢ \\ س^{٢} + ا س ، س < ٢ \end{cases}$

وكان $س_{١}$ = صفر

$\Delta س = ٥$

احسب متوسط تغير $ن(س)$

مثال

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ٦ - س ، س < ٢ \\ س^{٢} + ا س ، س \leq ٢ \end{cases}$

وكان متوسط تغير $ن(س)$ عندما تتغير س من (١) إلى (ا) يساوي ٩ ، حيث ا < ٢

جد ا

إذا كان $ن(س) = س + هـ^{س+١}$

احسب متوسط التغير في الفترة $[٠ ، ١]$

إذا كان $ن(س) = س^{٢} + ٧$

وكان متوسط التغير في الفترة $[س_{١} ، س_{١} + ٣]$

يساوي ١٢ ، جد $س_{١}$

مثال

إذا كان $ن(س) = \sqrt{٢س + ١}$

وكان متوسط تغير $ن(س)$ عندما تتغير س من (٠) إلى (ب) يساوي $\frac{١}{٢}$ ، جد ب حيث ب > ٠

مثال

إذا كان $ن(س) = س^{٢} + ٣س$ جد متوسط تغير $ن(س)$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ

مثال

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$ جد متوسط التغير في الفترة $[١ ، ١ + هـ]$

تمرين

١. إذا كان متوسط تغير $ه(س)$ في الفترة $[أ ، ١٣]$ يساوي ١١ ، جد قيمة أ (الجواب : أ = ١)

٢. إذا كان $ن(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، أثبت أن متوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[٢ ، ن]$ يساوي $أ(ن + ٢) + ب$

مثال

إذا كان متوسط تغير $ن(س) = س + لـو_{هـ} س^{ن}$ ، $س > ٠$ عندما تتغير س من ١ إلى هـ يساوي $\frac{٣ - هـ}{١ - هـ}$ ، جد ن

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران $ن(س)$ في الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي ٤ وكان $ك(س) = س^{٢} + ٣ن(س)$ ، جد متوسط تغير $ك(س)$ في نفس الفترة

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران $ن(س)$ في الفترة $[١ ، ٥]$ يساوي ٣ وكان متوسط تغير $هـ(س)$ في $[١ ، ٥]$ يساوي ٢

وكان $ن(س) = س هـ(س)$ ، جد $ن(١)$

مثال

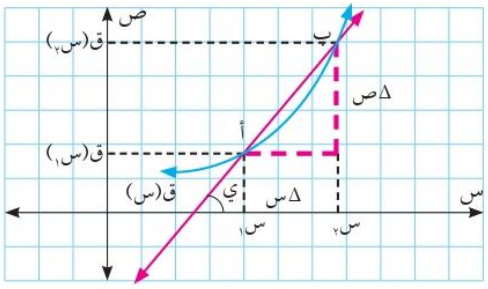
إذا كان متوسط تغير ن(س) في الفترة [٢ ، ٥] يساوي (-٦) وكان ن(٢) + ن(٥) = ٤ جد متوسط تغير

ل(س) = ٧س + ن٢(س) في [٢ ، ٥]

تعريف :

منحنى ن(س) يمر بالنقطتين أ ، ب والمستقيم

يمر بالنقطتين أ ، ب



ميل القاطع :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

تعريف :

إذا كان ف(ن) المسافة التي يقطعها الجسم ، ن الزمن

- متوسط تغير المسافة من $ن_١$ إلى $ن_٢$
- السرعة المتوسطة $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

مثال

إذا قطع المستقيم ل منحنى

$\left(\left(\frac{\pi}{٢}\right)ن ، \frac{\pi}{٢}\right) ، (٠ ، ن(٠))$

- جد ميل المستقيم ل
- جد قياس زاوية ميل المستقيم ل

إذا كان القاطع الواصل بين النقطتين

$(-٢ ، ن(-٢)) ، (٣ ، ٦)$ يصنع زاوية مقدارها

$\left(\frac{\pi ٣}{٤}\right)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد $ن(-٢)$

إذا قطع المستقيم ل منحنى ن(س) في النقطتين

$(١ ، أ) ، (٣ ، ب)$ وصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب متوسط تغير

$هـ(س) = ٣ن(س) + س^{٢} - ١$ في الفترة $[١ ، ٣]$

مثال

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب ف(ن) = ن^{٢} + ٨ن

- جد السرعة المتوسطة في [١ ، ٣]
- إذا كانت السرعة المتوسطة في [١ ، ٣] يساوي ١٣م / ث ، جد أ

تمرين

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب ف(ن) = ن^{٢} + ب ن وكانت السرعة المتوسطة في [١ ، ٣] تساوي ٦م/ ث ، جد قيمة ب ؟

سؤال

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١. إذا كان متوسط تغير ن(س) في [١ ، ٣] يساوي ٨ ، جد متوسط تغير هـ(س) = $\frac{٦}{ن(س)}$ في [١ ، ٣] حيث ن(١) × ن(٣) = ٤

أ) ٢ ب) -١٢ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{-٣}{٤}$

---

٢. إذا كان متوسط تغير ن(س) في [١ ، ٤] يساوي ٦ ، جد متوسط تغير هـ(س) = ن(س)^{٢} في [١ ، ٤] ، حيث ن(١) × ن(٤) = ٥

أ) ٣٦ ب) ٥ ج) ٣٠ د) ١٨

---

٣. $\begin{cases} ٥س + ٣ ، س > ٣ \\ أس + ١٢ ، س \leq ٣ \end{cases}$ وكان متوسط تغير ن(س) في [١ ، ٤] يساوي (٨) ، جد أ

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٢ د) ٥

٤. إذا كان متوسط تغير $ن(س) = ا س^{٢} - ٤س$ في $[١ ، ٣]$ يساوي (١٢) ، جد $ا$

أ) ب) ج) د)

---

٥. يقطع مستقيم $ل$ منحنى $ن(س)$ في النقطتين $(ا + ٢ ، ١)$ ، $(٤ ، ١٢)$ ، وكان ميل المستقيم $ل$ يساوي (٢) ، جد $ا$

أ) ب) ج) د)

---

٦. إذا كان $ن(س) = \begin{cases} \sqrt{ا س^{٢} - ٩} ، & ا \geq س \geq ٤ \\ ١١ - ٢س ، & ٤ > س \geq ٦ \end{cases}$ ، حيث $ا > ٠$ ، وكان متوسط تغير $ن(س)$ في $[ا ، ٦]$ تساوي $\frac{-١}{٣}$ ، جد $ا$

أ) $\frac{١٥}{٤}$ ب) ٣ ج) ٤ د) ١٥

---

٧. يتحرك جسم حسب $ف(ن) = \begin{cases} ٢ن^{٢} ، & ٢ \geq ن > ٠ \\ ٣ن - ا ، & ن > ٢ \end{cases}$ ، وكانت السرعة المتوسطة في الفترة $[١ ، ٣]$ تساوي ٩م/ث ، جد $ا$

أ) ١٢ ب) -١٢ ج) ١١ د) -١١

---

٨. إذا كان $ن(س) = (س^{٢} + س)^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في $ن(س)$ عندما تتغير $س$ من (١) إلى $س^{٢}$ تساوي $\frac{-١}{٣}$ ، جد $س٢$ حيث $س٢ > ٠$

أ) ب) ج) د)

---

٩. إذا كان متوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[-١ ، ٤]$ يساوي (٦) وكان $ن(٤)$ يساوي ٣ أمثال $ن(-١)$ ، جد $ن(٤)$

أ) -١٥ ب) ٤٥ ج) ١٥ د) -٤٥

---

١٠. إذا كان متوسط تغير $هـ(س)$ على الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي (٤) وكان معدل تغير $ن(س) = ٣هـ(س) - \frac{ا}{س}$ على الفترة نفسها يساوي ١٣ ، جد $ا$

أ) ب) ج) د)

٢ قواعد الإشتقاق

التعريف العام :

قاعدة (١) :

مشتقة الأعداد ← ق(س) = ك ← ق ´(س) = صفر

قاعدة (٢) :

مشتقة المتغيرات ← ق(س) = س^{ن} ← ق ´(س) = ن س$^{ن-١}$

قاعدة (٣) :

مشتقة الضرب

إذا كان ق(س) = ك(س) × هـ(س)

← ق ´(س) = (ك(س))(هـ ´(س)) + (هـ(س))(ل ´(س))

مثال

• جد $ن'(س)$ لكل مما يلي :

١. $ن(س) = ٥$

٢. $ن(س) = -٧ + هـ$

٣. $ن(س) = \pi + جتا\ \pi$

٤. $ن(س) = ظا\ \frac{\pi}{٣} - ٣\sqrt{٨}$

٥. $ن(س) = ٥س - ٣$

٦. $ن(س) = س^{-٣} + ٢س + ٥$ جد $ن'(-٢)$

٧. $ن(س) = س^{-٥} + س^{٢} + جـ$ حيث جـ ثابت جد $ن'(-١)$

٨. $(س^{-٣} - ١)(٢ + ١س)$ جد $ن'(٣)$

٩. $ن(س) = (١ - س)(١ + س)(١ + س^{٤})(١ + س^{٨})$ جد $ن'(١)$

١٠. $ن(س) = \frac{٥}{س^{٤}} - \frac{٣}{س^{٣}}$ جد $ن'(١)$

مثال

إذا كان ن ´(١) = ٥ ، ك ´(١) = −٣ ،
وكان ل(س) = ٢س + ن(س) − ٣ك(س) ،
جد ل ´(١)

ن(س) = أ ل(س) وكان ن ´(٣) = ٨ ، ل ´(٣) = ٤
، جد أ

أ٣س + هـ(س) ، هـ ´(١) = ٢ ، ن ´(١) = ٣
جد أ

ن(٢) = ٥ هـ(٢) = ٤
ن ´(٢) = −٣ هـ ´(٢) = صفر
جد :
١) (ن − هـ) ´(٢)
٢) (٣ن + ٢هـ) ´(٢)

مثال

إذا كان ل(س) = ٧ − ٢س^{٢} + $\frac{\text{ن}(س)}{٣}$،
وكان ن$'$(٢) = −٣، جد ل$'$(٢)

إذا كان ن(س) = أس^{٢} − ٤س + ٥
وكان ن$'$(٢) = ٥ ، جد أ

ل(س) = ٢ م(س) − ٣س^{٢} + هـ(س)
وكان ل$'$(١) = ٢ هـ$'$(١) = ٤ ، جد م$'$(١)

ن(س) = س^{٣} هـ(س) + ل(س)
هـ(٢) = ل(٢) = ٣ ، وكان هـ$'$(٢) = ل$'$(٢) = ٤
جد ن$'$(٢)

قاعدة (٤) :

مشتقة القسمة

١) $\frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}} \leftarrow \frac{\text{ن}(س)}{\text{أ}} \leftarrow \frac{\text{ن}'(س)}{\text{أ}}$

٢) $\frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}} \leftarrow \frac{\text{أ}}{\text{ن}(س)} \leftarrow \frac{-\text{أ} \times \text{ن}'(س)}{\text{ن}^{٢}(س)}$

٣) $\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}} \leftarrow \frac{\text{ن}}{\text{هـ}} \leftarrow \frac{(\text{هـ})(\text{ن}')-(\text{ن})(\text{هـ}')}{(\text{هـ})^{٢}}$

مثال

$\frac{١}{س^{٣}} + \frac{س^{٢}}{س-١}$ ، جد $\text{ن}'(-١)$

$\text{ن}(س) = \frac{س^{٢}}{٥-٣س}$ ، جد $\text{ن}'(٢)$

$\frac{٧س^{٤}}{٤} - \frac{٥س^{٣}}{٣}$ ، جد $\text{ن}'(س)$

$\text{ن}(س) = \frac{س^{٢}-٢}{٣+س}$ ، وكان $\text{ن}'(س) = \frac{-٣}{٤}$

جد قيم س

مثال

إذا كان $ن(س) = \frac{٥}{(أس - ٣)}$

وكان $ن'(٢) = -١٠$ ، جد أ

بالإعتماد على الجدول :-

جد

$ن(١)$	$ن'(١)$	$هـ(١)$	$هـ'(١)$
٢	٣	-١	-٣

١) $\left(\frac{ن + هـ}{١ + ٢ن}\right)'(١)$

٢) $\left(س^{٢} ن - \frac{٣}{هـ}\right)'(١)$

$ن(س) = \frac{٣ - ٢س}{س^{٢} هـ(س) + ٥}$

$هـ(٢) = ٦$ ، $هـ'(٢) = ٢$

$ن'(٢)$

تمرين

١) $ن(س) = \frac{٤س^{٢} + ٣}{س + هـ(س)}$ جد $هـ'(١)$

$هـ(١) = ١$ ، $ن'(١) = ٢$

٢) $ن(س) = \frac{أ + ٤}{س^{٢}}$ جد أ

$ن'(٢) = ١$

سؤال

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١. $هـ(س) = س^{٣} ن(س)$ ، $ن(٢) = -٣$ ، $ن'(٢) = ٥$ ، جد $هـ'(٢)$

أ) ٩ ب) -٤ ج) ٤ د) -٩

---

٢. $ن(س) = \frac{س^{٢}+١}{س}$ ، جد $ن'(\sqrt{٣})$

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) ٣

---

٣. إذا كان $(١+س^{٢}) ن(س) + ١٢ = ٤س^{٣}$ ، جد $ن'(-١)$

أ) ٤ ب) -٤ ج) ٢ د) -٢

---

٤. $ن(س) = \frac{س}{س^{٢}+١}$ ، جد أصفار المشتقة الأولى :

أ) $\{\pm١\}$ ب) $\{\pm٢\}$ ج) $\{\pm٣\}$ د) $\{\pm٤\}$

---

٥. $ن(١) = ٣$ ، $ن'(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ٥$ ، جد $\left(\frac{هـ}{ن}\right)'(١)$

أ) $\frac{١٧}{٩}$ ب) $\frac{-١٧}{٩}$ ج) $\frac{٩}{١٧}$ د) $\frac{-٩}{١٧}$

قاعدة (٥) :

مشتقة المتشعب وأكبر عدد صحيح :-

← القاعدة العامة :

مثال

$$\text{ن}(س) = \begin{cases} ٢س & ، \ س \leq ٢ \\ ٤ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

، جد $\text{ن}'(٢)$

$$\text{ن}(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، \ س < ١ \\ س^{٢} + س & ، \ س \geq ١ \\ ٥س & ، \ س < ٤ \end{cases}$$

، جد

$\text{ن}'(-٢)$ ، $\text{ن}'(٧)$ ، $\text{ن}'(٣)$ ، $\text{ن}'(١)$ ، $\text{ن}'(٤)$

مثال

$$ن(س) = \begin{cases} ١ - ٣س ، س \geq ١ \\ ٥س - ٢ ، س < ١ \end{cases}$$

، جد $ن'(١)$

$$ن(س) = \begin{cases} ا س^{٢} + ب ، س \leq ١ \\ س^{٣} + س ، س > ١ \end{cases}$$

، جد $ا$ ، $ب$ حيث $ن$ قابل للإشتقاق على $ح$

$$ن(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} + ٣س ، س > ١ \\ ٢س + ٢ ، س \leq ١ \end{cases}$$

، جد $ن'(١)$

$$ن(س) = \begin{cases} ا س^{٢} - ب س ، س \geq ٢ \\ ٤ - ب س^{٣} + ا س ، س < ٢ \end{cases}$$

، وكان $ن$ قابلاً للإشتقاق على $ح$ ، جد $ا$ ، $ب$

إستنتاج :-

مثال

ن(س) = [س] ، حيث س ∈ [٠ ، ٢]

جد ن´(س)

ن(س) = س^{٢} ، هـ(س) = [٢س]

، جد

١) ن´(٠)

٢) هـ´(٠)

٣) (ن × هـ)´(٠)

مثال

قاعدة :-

المشتقات العليا :-

$ن(س) = س^{٥} + ٤س^{-٣} - ١$

، جد $ن^{(٤)}(س)$

$ن(س) = \frac{س^{٤}}{١٢} + \frac{٥س^{٣}}{٣} - ٨س^{٢}$

، جد $ن''(س)$

$ن(س) = ٢س^{٤} + \frac{١٦}{س}$

، جد $ن''(٢)$

$ص = \frac{١}{س}$

، جد المقدار $س^{٢} ص'' + س ص'$

$ص = \frac{س}{س + ١}$

، جد المقدار $٢ ص ص' + س ص''$

مثال

$س^{٤} + ا س^{٣} - ٣$ ،

وكان $ن^{(٣)}(٢) = ١٨$ ، جد ا

$ن(س) = س^{ن}$ وكان $ن^{(٣)}(س) = ا س$

، جد ا

$ن(س) = \frac{س^{ن}}{٣}$ ، وكان $ن''(س) = ٤٠ س^{ن-٣}$

، جد ن

$ن(س) = ٢ س^{ن}$ ، وكان $ن''(س) = ا س^{٤}$

، جد ا

مثال

إذا كان $أ س^{٥} + \frac{٥}{س^{٤}}$

أثبت $\frac{٢٠ ص}{س^{٢}}$

مثال

إذا كان $ص = أ س^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$

أثبت أن $س^{٢} ص'' = ن(ن-١) ص$

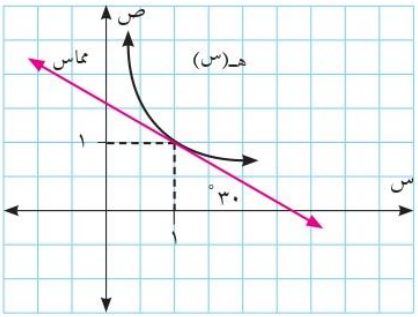
ورقة عمل

١. $ن(س) = أ س^{٤} + \frac{١٦}{\sqrt{س}}$ ، $س > ٠$ وكان $ن''(١) = ٣٦$ ، جد أ

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) ٤

---

٢. إذا كان $ن(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ والشكل المجاور يمثل هـ(س) ، جد $\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(١)$



---

٣. $ن(س) = ٤ س^{ن-١}$ ، وكان $ن''(س) = أ$ ، جد $أ - ٢ن$

أ) ١٩ ب) ١٦ ج) ٢ د) ٨

---

٤. ن كثير حدود من الدرجة الثانية $ن(١) = ٢$ ، $ن'(١) = -٣$ ، $ن''(١) = ٢$ ، جد قاعدة ن

---

٥. $ن(١) = ٢$
$ن'(١) = ٥$
$هـ'(١) = ٢$
$هـ''(١) = -١$

، جد $(ن \times هـ)'(١)$

٦. $\begin{matrix} ن(٣) = ٢ \\ ن'(٣) = ٥ \end{matrix}$ وكان $هـ(س) = س^{٢} ن(س) + \frac{٨}{ن(س)}$ ، جد $هـ'(٣)$

---

٧. $\begin{matrix} ن(٤) = ٥ \\ ن'(٤) = -١ \\ ن''(٤) = ٢ \end{matrix}$ ، جد $\left(\frac{ن}{ن'}\right)'(٤)$

---

٨. $\begin{matrix} ن(٢) = ١ \\ ن'(٢) = ٢ \\ ن''(٢) = ٣ \\ هـ(س) = \frac{٨}{س} \end{matrix}$ ، جد $(ن \times هـ)''(٢)$

---

٩. $ص = \frac{٢}{س}$ ، جد $ص''$ بدلالة $ص$

---

١٠. $ن(س) = \frac{م(س)}{ل(س).(س^{٢}+١)}$ ، وكان $\begin{matrix} م(١) = -٢ \\ م'(١) = ل(١) = -١ \\ ن'(١) = ٣ \end{matrix}$ ، جد $ل'(١)$

---

١١. $ن(س) = س ن(س) + ١$ ، جد $ن'(٢)$

---

١٢. $\begin{matrix} ن(س) = س^{٣} \\ هـ(١) = -١ \\ هـ'(١) = ٢ \end{matrix}$ ، جد $(ن . هـ)'(١)$

١٣ . $ن(س) = \frac{١}{٤}س^{٥}$ ، $ن \in ع$ وكان $ن^{(٤)}(س) = (أ+١)س^{٣}$ ، جد أ

---

١٤. $ن(س) = أس^{٤} + \frac{١٦}{س}$ وكان $ن''(س) = ٩٠$ ، جد أ

---

١٥. $ن(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٤ب س - ٨ ، س < ١ \\ أس^{٣} - ب س + ٢ ، س \geq ١ \end{cases}$ ، وكان $ن$ قابل للإشتقاق على $ع$ ، جد أ ، ب

٣ مشتقة الإقترانات المثلثية

جاس ← جتاس
جتاس ← – جاس

ظاس ← قا^{٢} س
ظتاس ← – قتا^{٢} س

قاس ← قاس ظاس
قتاس ← – قتاس ظتاس

مثال

$و(س) = س$ جاس ، جد $و'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

$و(س) = قاس + ظاس$ ، جد $و'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

$و(س) = \frac{س^{٢}}{جتاس}$ ، جد $و'(س)$

إذا كان ص = قتاس + ظتاس ، أثبت أن :

ص$'$ = قتاس – ٢ قتاس^{٣}

مثال

$$ص = \frac{١ - قاس}{١ + قاس}$$

مثال

$$ص = \frac{س}{قتاس + ظتاس}$$

مثال

ص =ظاس ، أثبت أن ص ″= ٢ص (١ + ص ٢)

مثال

$ص = \frac{جاس}{س}$ ، أثبت $ص'' + \frac{٢ص'}{س} + ص = ٠$

مثال

$ن(س) = \frac{س^{٢}}{٢} - جتاس$ ، $س \in [-٢\pi ، ٢\pi]$ جد قيم س ،حيث $ن''(س) = ٠$

مثال

$ص = قتاس$ ، جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$

مثال

$ن(س) = \frac{ظاس + ١}{جاس}$ جد $ن'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

تمرين

١. $ص = قاس + ظاس$ أثبت $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{١ - جاس}$

٢. $ن(س) = \frac{١}{ظاس \, جتاس}$ جد $ن'(س)$

٣. $ص = جتاس$ جد $ص + ص''$

مثال

إذا كان $ص = س \, ظاس$ ، أثبت $ص'' = ٢ \, ا(١ + ص) \, قا^{٢} \, س$

مثال

إذا كان $ص = ظتاس + قتاس$ ، أثبت $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ص^{٢} \, قتاس$

٤ قاعدة لوبيتال ومشتقة الإقتران الأسي واللوغاريتمي

قاعدة لوبيتال :-

ن(س) ، هـ(س) قابلين للإشتقاق عند النقطة س = أ ، ل ∈ ح

$$\text{نهـا}_{س\to أ}\frac{ن(س)}{هـ(س)} = \div \text{ ، نهـا}_{س\to أ}\frac{ن'(س)}{هـ'(س)} = ل \text{ ، نهـا}_{س\to أ}\frac{ن(س)}{هـ(س)} = ل$$

مثال

باستخدام قاعدة لوبيتال جد :-

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{\text{جا}س}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 2}\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{س-\text{جا}س}{س^{٣}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{١-\text{جتا}س}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{١-\text{جتا}س}{س^{٢}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0}\frac{٤س}{\text{ظا}س}$$

الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١ $هـ^{س} \times هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$

٢ $\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}} = هـ^{س-ص}$

٣ $(هـ^{س})^{ص} = هـ^{س ص}$

٤ $هـ^{٠} = ١$

٥ $هـ^{لـو_{هـ} س} = س ، س > ٠$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح$^{+}$

١ $لـو_{هـ} س ص = لـو_{هـ} س + لـو_{هـ} ص$

٢ $لـو_{هـ} \frac{س}{ص} = لـو_{هـ} س - لـو_{هـ} ص$

٣ $لـو_{هـ} س^{ن} = ن\ لـو_{هـ} س ، س > ٠$

٤ $لـو_{هـ} هـ^{س} = س$

المشتقة ← $ص = هـ^{س}$ $ص' = هـ^{س}$	$ق(س) = لـو_{هـ} س$ $ق'(س) = \frac{١}{س}$
← $ص = هـ^{ق(س)}$ $ص' = ق'(س) . هـ^{ق(س)}$	$ق(س) = لـو_{هـ} ل(س)$ $ق'(س) = \frac{ل'(س)}{ل(س)}$

مثال

$ق(س) = س^{٣} هـ^{س} + ق تا س$

$ق(س) = (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$

$ق(س) = هـ^{س} اجتا س$

تمرين

جد مشتقة ما يلي :

١- $ن(س) = س هـ^{س}$

٢- $ن(س) = هـ^{س} لـو_{هـ} س$

٣- $ن(س) = (هـ^{س})^{٥}$

٤- $ن(س) = \sqrt{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١}$

مثال

جد مشتقة ما يلي :

$ن(س) = لـو_{هـ} \left(\frac{س}{س+١}\right)^{٢}$ ، جد $ن'(٢)$

$ص = لـو \sqrt{\frac{س^{٣}}{س^{٨}}} + لـو \sqrt{س}$

$ن(س) = ٦ لـو_{هـ} \sqrt{٧ - س^{٢}}$ ، جد $ن'(١)$

إذا كان $ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ وكان $ص' = ص$ ، جد قيم س

مثال

إذا كان $ص = هـ^{٢س} + (س + ١) هـ^{جاس}$ وكان $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٠} = ٤$ ، جد ا

مثال

إذا كان $لـو_{هـ} ص = ا س$ ، $ا > ١$ وكان $٣ص'' - ٠١ص' + ٣ص = ٠$ ، جد ا

مثال

إذا كان $ص = (هـ^{٣س+١})^{٤}$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، عند $ص = ١$

إذا كان $لـو_{هـ}\left(\frac{\sqrt{٣س^{٢} + س + ٢}}{س^{٣}}\right) + هـ^{٣-س^{٢}}$ ،

جد $ن'(٢)$

تمرين

$ن(س) = لـو \left(\frac{هـ^{س^٢}}{س}\right)^{٢}$ ، جد $ن'(١)$

إذا كان $ن(س) = هـ^{\frac{١}{س}} + لـو_{هـ} \sqrt{س}$ ، وكان $ن'(١) = هـ$ ، جد أ

إذا كان $ص = \sqrt{هـ^{أس}}$ ، وكان $ص'' + ٤ص' + ٤ص = ٠$

جد أ

$ن(س) = \frac{هـ^{س}}{لـو_{هـ} \sqrt{٢ + س}}$ ، جد $ن'(٠)$

مثال

باستخدام قاعدة لوبيتال جد :-

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{هـ^{س-1}-س}{\text{لـو}_{هـ} س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{هـ^{س}-1}{س}$$

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{\text{لـو}_{هـ} س}{س^{2}-1}$$

قاعدة :

نهايات على صورة مشتقة :-

١- $$\text{نهـا}_{س\to أ} \frac{ن(س)-ن(أ)}{س-أ} = ن'(أ)$$

٢- $$\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ن(س+هـ)-ن(س)}{هـ} = ن'(أ)$$

٣- $$\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ن(أ+هـ)-ن(أ)}{هـ} = ن'(أ)$$

مثال

إذا كان $ن'(٢) = ٥$، جد :-

$$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{ن(س)-ن(٢)}{س-٢}$$

$$\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ن(٢+هـ)-ن(٢)}{هـ}$$

مثال شامل

إذا كان $ن'(٣) = ٨$ جد :-

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ن(س) - ن(٣)}{س - ٣}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+٥هـ) - ن(٣)}{٤هـ}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{ن(س) - ن(٣)}{س^{٣} - ٢٧}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+٢هـ) - ن(٣)}{٥هـ}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٧هـ}{ن(٣+هـ) - ن(٣)}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣-هـ)}{هـ}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+٥هـ) - ن(٣-٤هـ)}{هـ}$$

مثال

إذا كان $ن'(٢) = ٧$ ، جد :-

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ن(س) - ن(٢)}{س - ٢}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ن(س) - ن(٢)}{س^{٢} + س - ٦}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{ن(س) - ن(٢)}$$

مثال

إذا كان $ن(٣) = -٢$ ، $ن'(١) = -٢$ ، $ن'(٣) = ٤$ جد :-

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + ٥هـ) - ن(٣)}{١٠ هـ}$$

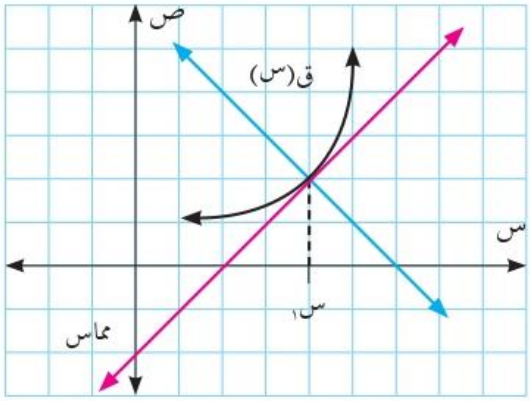
$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{ن(س) - ن(١)}$$

مثال

جد $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س ن(١) - ن(س)}{س - ١}$ ،باستخدام لوبيتال علماً أن $ن'(١) = ٣$ ، $ن(١) = ٦$

٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية

١) تطبيقات هندسية



معادلة المماس + العامودي

ميل المماس

$= \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$= ق'(س_١)$

$= ظا هـ$

نقطة التماس

$(س_١ ، ص_١)$

هـ : زاوية محصورة بين المماس ومحور السينات الموجب .

معادلة المماس ← $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

معادلة العامودي ← $ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$

مثال

جد معادلة المماس والعامودي لكل مما يأتي :

$ق(س) = س^{٣} + ٥س$ ، عند $س = ١$

$ق(س) = ٣ - ظا^{٢}س$ ، عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$ق(س) = \frac{س^{٢}}{هـ^{س}}$ ، عند $س = ١$

$ق(س) = س لـو س - هـ^{°}$ ، عند $س = هـ$

مثال

إذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $س > ٠$ يصنع زاوية مقدارها $١٣٥^{°}$ مع السينات الموجب ، أثبت أن العامودي على المماس عند نقطة المماس لمنحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(٠ ، ٠)$

مفاتيح الحل

التوازي

ميل الأول = ميل الثاني

حالات التقاطع

السينات ← ص = ٠

الصادات ← س = ٠

اقترانات ← ق(س) = هـ(س)

التعامد

ميل الأول × ميل الثاني= -١

يمس / مماساً

صورة = صورة

مشتقة = مشتقة

مثال

جد معادلة المماس والعامودي لكل مما يأتي :

جد النقطة (النقاط) على منحنى
ق(س) = س^{٢} − ٢س + ١ التي يكون عندها
المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم
س + ٢ص − ٤ = ٠

ما معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٣} − ٨
عندما يقطع محور السينات

مثال

ما معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = س^{٣} + ٥$ عندما يقطع محور الصادات

جد معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = س^{٣}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $ص = س + ٦$

جد معادلة المماس لمنحنى

$ن(س) = س^{٢} - ٢س + ١$ إذا كان عمودياً على المستقيم $٦ص + ٣س - ٥ = ٠$

جد النقطة (النقاط) التي يكون عندها المماس لمنحنى $ن(س) = \frac{س^{٢} + س + ١}{س + ١}$ عمودياً على المستقيم $٣ص = ٤س + ٥$

تمـرين

جد معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = ظاس$ حيث $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ عندما يكون موازياً للمستقيم $ص = ٤س + ٢$

مثال

ملاحظة مهمة جداً :

جد قيمة أ إذا كان $ق(س) = س^{٢} + أ$ الذي يجعل المستقيم $س = \frac{ص}{٤}$ مماساً له

إذا كان $ص = ٢س + ٣$ يمس الإقتران

$ق(س) = أس^{٢} + بس + ١٠$ عند $س = ١$ ،

جد أ ، ب

جد قيمة أ الذي يجعل المستقيم المار بالنقطتين $(٢ ، ٠)، (-٣ ، ٥)$ مماساً لمنحنى

$ق(س) = \frac{أ}{س + ١}$

مثال

إذا كان المستقيم $٨س - ٤ص + ١ = ٠$ يمس $ن(س) = \frac{٣}{٢}س - \frac{٨}{\sqrt{س}}$ ، جد $أ$

إذا كان المستقيم $س = أ - ٦ص$ يمس منحنى $ن(س) = \frac{٣س}{س - ٢}$ ، جد قيم $أ$

$ن(س) = أس + س^{٢} + أ$ يمس محور السينات ، جد $أ$

$ن(س) = س^{٢} - أس - (١ - أ)$ يمس محور السينات ، جد $أ$

مثال

ص = ٣س + ٤ يمس منحنى ن(س) = أس + س^{٢} + أ عند (٠ ، ٤) ، جد أ ، ب

جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي ومحور السينات للإقتران ن(س) = س^{٢} ، عند (٢ ، ٤)

ملاحظة مهمة جداً :

جد مساحة المثلث المكون من المماس والمستقيم س = ٤ ومحور السينات للإقتران ن(س) = $\sqrt{س}$ عند (٤ ، ٢)

مثال

إذا كان المماس لمنحنى $ص(س) = لـو_{هـ} \frac{س}{٢}$ عندما $س = ٢$ يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب ، جـ على الترتيب ، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل

يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}$ ، احسب سرعة وتسارع الجسم عند $ن = ٥$

تطبيقات فيزيائية

المسافة ← السرعة ← التسارع

السرعة اللحظية = $ع = ف' = \frac{د ف}{د ن}$

التسارع اللحظي = $ت = ع' = \frac{د ع}{د ن}$

يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٤ن^{٢} + ١٨$ ، احسب سرعة الجسم عندما يكون التسارع ٤ م \ ث^{٢}

مثال

$ف(ن) = \frac{ن^{٣}}{٣} - ٤ن^{٢} + ٧ن + ١٢$ احسب التسارع عندما تنعدم السرعة ؟

يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} + ٣ن$ ، إذا كانت سرعة الجسم عند $ن = ٥$ تساوي السرعة المتوسطة في $[٠ ، ١]$ ، جد قيمة ١

$ف(ن) = جا ن + جتا ن$

$ن \in [٠ ، ٢\pi]$ احسب المسافة والتسارع عندما يطون الجسم في حالة سكون لحظي

تحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} + ٧$ ، جد تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته

مثال

قذف جسم رأسياً لأعلى حسب

$ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$

١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم

٢- جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠م

٣- متى تصبح سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الإبتدائية ؟

٤- جد قيم $ن$ والتي تكون السرعة عندها موجبة

٥- متى يعود الجسم إلى الأرض ؟

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض حسب

$ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$

١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم

٢- جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥م من سطح الأرض

٣- المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى

مثال

من قمة برج إرتفاعه ٢٢٥م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة

$ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$

١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم عن قمة البرج وعن سطح الأرض ؟

٢- جد الزمن اللازم حتى يصل الجسم إلى الأرض ؟

٣- جد سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض ؟

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج حسب

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$

١- جد ارتفاع البرج علماً بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض ١٨٠م

٢- سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض

٣- المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني السبعة الأولى

مثال

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض حسب

$ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$

جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠م

من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$

١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم

٢- سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على إرتفاع ٤٠م

٦ قاعدة السلسلة

١) تركيب الإقترانات

- ✓ $(ن \circ هـ)(س) = ن(هـ(س))$
- ✓ $(ن \circ هـ)'(س) =$
- ● $ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

مثال

إذا كان

$ن(س) = س^{٣} + س$

$هـ(س) = س^{٢}$

جد :

$(ن \circ هـ)'(س)$

$(ن \circ هـ)'(٢)$

$(هـ \circ هـ)'(س)$

إذا كان

$ن(٣) = ٣$ ، $ن'(٣) = ٥$

$هـ(٣) = ٢$ ، $هـ'(٣) = ٤$

$ن'(٢) = ١$ ، $ن(٢) = -٢$

جد :

$(هـ \circ ن)'(٣)$

إذا كان $ل(س) = س^{٢} \times (ن \circ هـ)(س)$.

جد $ل'(٣)$

مثال

إذا كان

$ن(س) = س + \frac{١}{س}$

$هـ(س) = جتا س$

أثبت أنّ :

$(ن \circ هـ)'(س) = جا^{٣} س \, قا^{٢} س$

٢) مشتقة إقتران مرفوع لقوة

إذا كان $ن(س) = (هـ(س))^{ن}$

فإنّ

$ن'(س) = ن (هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

جد مشتقة كل من :

١) $ن(س) = (س^{٣} + ٤س)^{٦}$

٢) $ن(س) = (جا س + جتا س)^{٥}$ جد $ن'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

٣) $ن(س) = \left(س^{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{٣}$ جد $ن'(٢)$

٤) $ن(س) = \frac{س^{٤}}{(س^{٢} - ١)^{٤}}$ جد $ن'(س)$

مثال

٨) ص = جا^{٧} س

٩) ص = (لـو$_{هـ}$ س)^{٣}

١٠) ق(س) = $\left(\frac{س+١}{س-١}\right)^{٥}$ جد ق$'$(٢)

٥) ق(س) = $\sqrt[٥]{(س^{٣}+٤س)^{٨}}$

٦) ق(س) = $\sqrt[٨]{س^{٣}+جتاس}$

٧) ق(س) = $\sqrt[٨]{٣س^{٢}+٦س}$ جد ق$'$(١)

مثال

إذا كان

$ن(س) = \sqrt{جاس + جتاس}$

$هـ(٠) = ٢$

$هـ'(٠) = ٦$

جد : $(ن \times هـ)'(٠)$

$ص = ٧ع - ٥$ ، $ع = ٣س + ٨$ جد $\frac{د ص}{د س}$

٣) مشتقة السلسلة

$ص \leftarrow ع \leftarrow س$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} \rightarrow$$

$ص = ع^{٢} - ٥ع$ ، $ع = \frac{١}{س + ١}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ ،

عند $س = ٠$

مثال

ص = م^{٣} + ٢م + ٥

م = س^{٢} + ٣ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند م = ٤

ص = ع^{٢} + $\frac{٦٤}{ع}$ وكان

ع = س^{٣} ، س = أم + ٤

جد أ بحيث $\left|\frac{د ص}{د م}\right|_{م=س=٢}$ = ٩٠

ص = ظاع ، ع = س^{٣} + ٥س ، جد $\frac{د ص}{د س}$

ص = ن^{٢} + ٥ن ، وكانت $\left|\frac{د ن}{د س}\right|_{ن=١}$ = ٢ ، جد

$\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{ن=١}$

مثال

$ص = \left(\frac{ع+١}{ع-١}\right)^{٢}$

$ع = س^{٢} + ٢س$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

$ص = ع^{٣} + ٢ع$

وكان $ع = \sqrt{٣ + ٢جا^{٢} س}$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$ص = ع^{٢} - \frac{٨}{ع}$

$ع = ٢س\sqrt{س}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $ص = ٠$

ملاحظة مهمة جداً :

إذا كانت الإقترانات ن ، هـ ، ل

وكانت الإقترانات المثلثية ما بداخلها ليس س

⇐ نستخدم مشتقة الأب وإبنه

مثال

جد مشتقة كل من :

٥) $د(س) = جا(٣س^{٢})$

٦) $ص = قا(٥س^{٣})$

٧) $ص = جتا^{٥} ٣س^{٢}$

٨) $ص = قا^{٥} ٣س + ظتا^{٣} س^{٢}$

١) $ص = س ظا\left(\frac{١}{س}\right)$

٢) $ص = س^{٢} جتا^{٣}\left(\frac{١}{س}\right)$

٣) $ص = جا^{٣} س + جا س^{٣}$

٤) $ص = س^{٢} قا\left(\frac{\pi}{س}\right)$

٩) $ص = جتا^{٤} ٢س + جا^{٣} \frac{\pi}{٢}$

١٠) $ص = ن(س^{٣} + س^{٢})$ ،

وكانت $ن'(١) = ٤$

$ن'(٢) = ٧$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

١١) $ن(٣س + ١) = ٥س^{٢} + ٧س$ جد

$ن'(٧)$

١٢) $ن(س^{٣} + ١) = ٢س^{٣} + ٦س^{٢}$ جد $ن'(٢)$

١٣) $ص = ن^{٣}(س) - ن(س^{٣})$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند

$س = ٢$ علماً أنّ

$هـ(٢) = ١$ ، $هـ'(٢) = -٢$ ، $هـ'(٨) = ٢$

١٤) ص = س ن(س^{٢} + ١) جد معادلة المماس
عندما س = ٢ علماً أنّ
ن$'$(٥) = ٣ ، ن(٥) = −١

أمثلة متنوعة :

١) ن(٢) = ٣ ، ن$'$(٢) = ٥
هـ(٢) = ٢ ، هـ$'$(٢) = ٦
، وكان ل(س) = س^{٣} × (ن ∘ هـ)(س)
، جد ل$'$(س)

---

٢) إذا كان (ن ∘ هـ)(س) = س^{٣} + ١٢أس
، وكان ن$'$(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$
، هـ(١) = ١ ، هـ$'$(١) = ٥
، جد أ

---

٣) إذا كان $\left(\text{جا}\left(\frac{\pi}{١٨}(٤\text{س} - ٢)\right)\right)^{٢} = (٢\text{س} - ١)$
، جد ن$'$(٣)

---

٤) إذا كان ن(س) = س^{٢} م(س + ١)
، معتمداً الجدول جد ن$''$(١)

---

٥) إذا كان ن(س) = $\frac{\text{لو}_{هـ} م(\text{س})}{٢\text{س}}$
، وكان م(١) = هـ^{٢} ، م$'$(١) = ٢هـ ، جد
ن$'$(١)

---

٦) جد النهايات التالية :

١- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ظا}(٢\text{س} + هـ) - \text{ظا}٢\text{س}}{هـ}$

٢- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{جا}^{٣}\left(\frac{\pi}{٣} + هـ\right) - \text{جا}^{٣}\frac{\pi}{٣}}{هـ}$

٣- $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٨}} \frac{\text{ظتا}^{٢}٢\text{س} - \text{ظتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}{\pi - ٨\text{س}}$

٤- $\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(١+٣هـ) - ن(١-٣هـ)}{١٠هـ}$ علماً $ن'(١) = -٢$

٥- إذا كان $ن'(٢) = ٣$ ، $ن''(٢) = ٥$

جد $\lim_{س \to ١} \frac{ن'(٢س) - ن'(٢)}{س - ١}$

٦- إذا كان $ص = ظا^{٣}س + \frac{ظا^{٣}س}{٣}$

أثبت $ص' = قا^{٤}س$

٧- $ص = جاس - \frac{١}{٣}جا^{٣}س$

أثبت $ص' = جتا^{٣}س$

٨- $ن(س) = (س^{٢} - ٣)^{٥}$

$هـ(س) = \sqrt{س^{٣} - س^{٢}}$

جد $(ن \circ هـ)'(٢)$

٩- $ن(س) = ظا^{٣}س$

$هـ(س) = \frac{٥}{٣س - ٢}$

جد $(هـ \circ ن)'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

١٠- $ن(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣س ، س \geq س \\ س^{٣} ، س < ٢ \end{cases}$

وكان $هـ(س) = (س^{٢} - ٣)^{٤}$

جد $(ن \circ هـ)'(٢)$

١١- $ص = لـو_{هـ} س^{٢}$

جد قيمة $ص''_{هـ}$

١٢- $ن(س) = \sqrt[٣]{(٤ + ٧س^{٢})^{٥}}$

$هـ(س) = \frac{٨}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

جد $(ن \circ هـ)'(١)$

١٣- إذا كان $ن(س^{٣} - ١) = ٦س^{٢} + ٨س$

جد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(٧ + ٣هـ) - ن(٧)}{٤هـ}$

١٤- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{\frac{٣}{٤} - جا^{٢}(٢س)}{\pi - ٦س}$

٧ الإشتقاق الضمني

ملاحظة مهمة جداً :

مثال

$س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٤س - ص$ جد $\frac{د ص}{د س}$

$ص^{٣} + ٢س^{٢} = ٨س - ٤ص$ جد $\frac{د ص}{د س}$

مثال

ظاص+جتاهس = ٤س^{٢} − ٩ص جد $\frac{د ص}{د س}$

ص^{٣} + ٤سص = ٦س^{٢} + ١٨

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند (٢ ، ١)

ظا(سص) = ص

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $\left(١ ، \frac{\pi}{٤}\right)$

٣ص = جاس جتا٢ص

جد $\frac{د ص}{د س}$

مثال

$\frac{١}{س} + \frac{س}{ص} = ١$

جد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند س $= ٢$

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$(س + ص)^{٣} - ٣ص^{٢} = ٥،٠ص$ عند

نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $س + ص = ٢$

جد النقط على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$

التي يكون عندها المماس موازيا.

اذا كان $ص^{٢} = \frac{س}{س + ١}$ أثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص^{٣}}{٢س^{٢}}$

تمرين

١) اذا كان $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$ س ص جد $ص'$

٢) $س^{٢} = لـو_{هـ}(س ص)$ ، جد $ص'$ عند $(١ ، هـ)$

٣) اذا $هـ^{ص} + هـ^{س} = هـ^{-ص} + هـ^{-س}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $(-١ ، ١)$

٤) اذا كان س = ظتا ص اثبت $ص' = -جا^{٢} ص$

تمرين

اكتب معادلة المماس لمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم $ص = ٢س + ١$

اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ من النقطة $(٥ ، ٠)$

تمرين

جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى $ص = س^{٢} - ٣س + ٥$

اذا كان المستقيم المار بالنقطة $(-٢ ، ٠)$ يمس منحنى العلاقة $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ جد نقطة / نقط التماس

تمرين

جد النقط على منحنى $٩س^{٢}+١٦ص^{٢}=٥٢$ و التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $٩س-٨ص=١$

ملاحظة مهمة جداً :

١) يتحرك جسم حسب $ع^{٢}=ف^{٣}$ احسب تسارع الجسم عندما تكون السرعة $٨ م\ث$

٢) $ع^{٢}=١-ف^{٣}$ جد تسارع الجسم في حالة السكون اللحظي

تمرين

٣) يتحرك جسم على خط مستقيم حسب $ف^{٢} = أن^{٢} + ٢٤$ جد قيمة أ حيث $أ > ٠$ علما بأن سرعته بعد ٢ ثانية تساوي ١٢ م\ث.

اذا كانت $ف = أجا(٢ن + م)$ هي معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم حيث أ ، م عددان اثبت ان $ت = -٤ف$ عدديا

اذا كان $ف \circ هـ$ اقترانين قابلين للإشتقاق و كانت

$$ص = (ن(س))' \times (هـ(س))'$$

اثبت:

$$\frac{ص'}{ص} = م\left(\frac{ن'}{ن} + \frac{هـ'}{هـ}\right)(س)$$

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٣ ، ٧] يساوي -٥، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١ ، ٧]؟

أ) ٢ ب) ١ جـ) -١ د) -٢

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، -١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$؟

أ) -١ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا٢س، فما قيمة قً(س) + ٦ق(س) ؟

أ) جتا٢س ب) جا٢س جـ) ٢جتا٢س د) ٢جا٢س

٤ إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢س + ١}$ = $س^٣ + ٢$ وكان ق قابلاً للاشتقاق، فما قيمة قَ(٣) ؟

أ) ١٦ ب) ٢٩ جـ) ٤٨ د) ١٤٤

٥ إذا كان $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٣$، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، -١) ؟

أ) -٢ ب) -١ جـ) ١ د) ٢

٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س \neq ٥ \\ ١٠س & ، س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة قَ(٥) ؟

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ١٠ د) غير موجودة

٧ يتحرك جسيم على خط مستقيم وَفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتار، ن : الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ ث،

فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

٨ إذا كان قَ(س) = $\frac{١}{١ + س^{٢}}$ ، هـ(س) = ظاس ، فما قيمة (ق ○ هـ)َ (س) ؟

أ) قا^{٢}س ب) جتا^{٢}س جـ) ١ د) قا^{٢}س ظا^{٢}س

٩ إذا كانت ق(س) = (س^{٢} + ٧)$^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة قً(١) ؟

أ) $\frac{١١}{١٨}$ ب) $\frac{٤}{٩}$ جـ) $\frac{١٥}{١٨}$ د) $\frac{١}{٢}$

١٠ إذا كانت س = جتاص ، ص ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ) $\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ ب) $\frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ جـ) $\frac{-س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ د) $\frac{س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

١١ إذا كان (ق ○ هـ)َ (٣) = ١٥ ، وكان ق(س) = س^{٢} − ٩ ، هـ(٣) = ٥ ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ) ٠ ب) ١,٥ جـ) ٢ د) ٣

١٢ أي الاقترانات الآتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله؟

أ) ق(س) = [س − ٢] ب) ق(س) = |س − ٢| − |س|

جـ) ق(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢س + ١}$ د) ق(س) = [س + ٢] − [س]

٢ إذا كان قَ(١) = −٢ ، ق(٣) = −٢ ، قَ(٣) = ٤ ، جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + ٩هـ) - ق(١)}{\sqrt{١ + هـ} - ١}$

٣ جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) = (س + ١)هـ$^{س^{٢} - س}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٤ إذا كان ق(٢) = ٣ ، قَ(٢) = −١ ، جد $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س^{٢} + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^{٢} - ١}$.

٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{٤س} - ١}{ظاس}$ ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س^{٢}} - هـ^{س}}{٢س}$

جـ) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س - جاس}{٢س}$ د) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س جاس}$

٦ إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ق(س - ١) & ، \ س \leq ١ \\ ق(س) & ، \ س > ١ \end{cases}$ ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٣ جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٠ ، ٣]

٧ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٢}{س - ١} = ٣$، ق متصلاً على ح.

جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

٨ يقف أحمد ونزار على سطح بناية، أفلت أحمد كرةً من السكون وَفق العلاقة ف$_{١}$(ن) = ٥ن^{٢}، وفي اللحظة نفسها، رمى نزار كرةً أخرى عمودياً إلى أسفل وَفق العلاقة ف$_{٢}$(ن) = ١٥ن + ٥ن^{٢}، فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض؟
(ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

٩ إذا كان ق(س) = أجاس ، هـ(س) = $\frac{٣س}{س^{٢} + ١}$ فجد قيمة أ بحيث (هـ ○ ق)َ($\frac{\pi}{٦}$) = ٠ ، أ ≠ ٠

١٠ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [٢ - س] + س^{٢} & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ \frac{٢}{س + ١} & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$ ،

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

١١ يتحرك جسم على خط مستقيم وَفق العلاقة ف = ٢(هـ^{٢ن} - هـ$^{-٢ن}$)، بيّن أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ف عددياً. (ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

١٢ إذا كان ق(س) = جا^{٣}س - جتا^{٣}س ، جد قً($\frac{\pi}{٤}$).

١٣ جد مجموعة قيم س التي تكون عندها قَ(س) = ٠ في كل مما يأتي:

أ ق(س) = (س - ٢)^{٣} (٣ + ٢س)^{٤}، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = جاس (١ + جتاس) ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

١٤ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ ص = ق(س) = $\frac{س هـ^{٦س}}{جاس}$ ، جاس ≠ ٠

ب ص = ق(س) = $\frac{س لـو_{هـ} س}{جتاس}$ ، حيث س > ٠ ، جتاس ≠ ٠

١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن) حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)؟

١٦ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ موازياً للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

١٧ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	منخفض
أجد متوسط التغير جبريا وهندسيا			
استخدم قاعدة لوبيتال في ايجاد المشتقات			
أجد مشتقات الاقترانات واحل مسائل منوعة عليها			
أجد مشتقة اقترانات ليست كثيرة حدود			
أوظف قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني في ايجاد مشتقة اقترانات			

WATAD.me

01 تحتوي على جميع تمارين وأسئلة الكتاب

02 ورقة عمل + امتحانات محوسبة

03 يتوفر الشرح كاملاً من خلال بطاقة موقع وتد التعليمي

FOllow me on instagram

@Samerrashad88

قروب
فوج الإبداع الخامس 2006

scan me

منصة_أوائل_المملكة