الوحدة

٢

تطبيقات التفاضل

Differentiation Applications

ما سبب انهيار بعض السدود؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى نظرية القيمة المتوسطة، ونظرية رول، وبعض التطبيقات عليها.

٢ إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.

٣ إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.

٤ إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.

٥ تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.

٦ توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.

أولاً: نظرية رول*

نشاط ١ : الشكل المجاور يمثل جزءاً من الأقواس التي تزين المسجد العمري الكبير بغزة حيث الخط أ ب يمثل خطاً أفقياً يصل بين نهايات الأعمدة.

ما ميل الخط الأفقي أ ب ، وما ميل الخط الأفقي المار بالنقطة (جـ)؟ وما قيمة قَ(جـ)؟

المسجد العمري الكبير

نظرية رول* :

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ) = ٠

مثال ١ : بيّن أن الاقتران ق(س) = س^{٢} – س – ٦ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠ ، ١]. ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ١]

ق(س) متصل في الفترة [٠ ، ١] وقابل للاشتقاق في الفترة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود

ق(٠) = -٦ ، ق(١) = -٦ ، ومنها ق(٠) = ق(١)

تحققت شروط نظرية رول

إذن يوجد على الأقل جـ ∈]٠ ، ١[بحيث قَ(جـ) = ٠

٢ نجد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية:

قَ(س) = ٢س – ١ ومنها قَ(جـ) = ٢جـ – ١ = ٠

جـ = $\frac{١}{٢}$ ∈]٠ ، ١[

* ميشيل رول : هو عالم رياضيات فرنسي اشتهر بوضعه مبرهنة رول (١٦٩١)

مثال ٢ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π] حيث أ < ٠ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]

فإن ق(أ) = ق(π) ومنها جتا٢أ + ٢جاأ = ١ (لماذا؟)

إذن $-٢جا^{٢}أ + ٢جاأ = ٠$ ..... (لماذا؟)

٢جاأ(جاأ − ١) = ٠ ومنها إما جاأ = ٠ فتكون أ = ٠ ، π (مرفوضة)

أو (جاأ − ١) = ٠ ومنها جاأ = ١ فتكون $أ = \frac{\pi}{٢}$

مثال ٣ : ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، \ -٤ \leq س < -١ \\ س^{٢} - ٧ & ، \ -١ \leq س \leq ١ \end{cases}$

في الفترة [−٤ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت).

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [−٤ ، ١]

١ ق(س) متصل في [−٤ ، −١[لأنه كثير حدود

ق(س) متصل في]−١ ، ١] لأنه كثير حدود

لكن ق(س) غير متصل عند س = −١ ..... (لماذا؟)

ومنها فإن ق(س) غير متصل على [−٤ ، ١]

٢ $قَ(س) = \begin{cases} ١ & ، \ -٤ < س < -١ \\ ٢س & ، \ -١ < س < ١ \end{cases}$ ،

قَ(−١) غير موجودة (لماذا؟)

إذن ق(س) غير قابل للاشتقاق على]−٤ ، ١[

٣ ق(−٤) = ق(١) = −٦

لم تتحقق شروط نظرية رول على [−٤ ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث قَ(جـ) = ٠ فإنه:

عندما $-٤ < س < -١$ تكون قَ(س) ≠ ٠ ، لا يوجد جـ في هذه الفترة

عندما $-١ < س < ١$ فإن ٢جـ = ٠ ، أي أن جـ = ٠ ∋]−١ ، ١[

هل يتعارض هذا مع نظرية رول ؟ ..... (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^{٢} - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$ ، س ∈ [−١ ، ب] يحقق شروط نظرية رول في [−١ ، ب]، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠ ، فجد الثابتين أ ، ب

الحل : بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [−١ ، ب] فإن:

ق(س) متصل في [−١ ، ب] ومنها فإن ب < ٣، ..... (لماذا؟)

وبالتالي ق(س) = (س − ٢)(س + أ) = س^{٢} + أس − ٢س − ٢أ ، س ≠ ٣ (لماذا؟)

وبما أن ق(ب) = ق(−١) فان ب^{٢} − ٢ب + أب = ٣ − أ ..... (١) (لماذا؟)

لكن قَ(س) = ٢س + أ − ٢ ، س ∈]−١ ، ب[

وبما أن جـ = ٠ فإن قَ(٠) = ٠ ومنها أ = ٢ (لماذا؟)

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) نحصل على أن قيمة ب = ١

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ ، جـ] بحيث قً(س) موجودة في]أ ، جـ[، وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)، حيث أ < ب < جـ.

أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∈]أ ، جـ[بحيث قً(د) = ٠

الحل :

١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [أ ، ب]

وحيث أن قً(س) موجودة في]أ ، جـ[فإن:

ق(س) متصل على [أ ، ب] و قابل للاشتقاق على]أ ، ب[، ق(أ) = ق(ب)

∴ تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ$_{١}$ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ$_{١}$) = ٠

٢ نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في [ب ، جـ]

ق(س) متصل على [ب ، جـ] وقابل للاشتقاق على]ب ، جـ[، ق(ب) = ق(جـ)

∴ تحققت شروط نظرية رول ، ومنها يوجد جـ$_{٢}$ ∈]ب ، جـ[بحيث قَ(جـ$_{٢}$) = ٠

لاحظ أن جـ$_{١}$ < جـ$_{٢}$ ..... (لماذا؟)

٣ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران قَ(س) في [جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$]

قَ(س) متصل في [جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$] وقابل للاشتقاق في]جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$[(لماذا؟)

قَ(جـ$_{١}$) = قَ(جـ$_{٢}$)

∴ تحققت شروط نظرية رول على قَ(س) في [جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$]

يوجد على الأقل عدد مثل د ∈]جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$[⊆]أ ، جـ[بحيث قًّ(د) = ٠

ثانياً: نظرية القيمة المتوسطة (Mean Value Theorem) *

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب] .

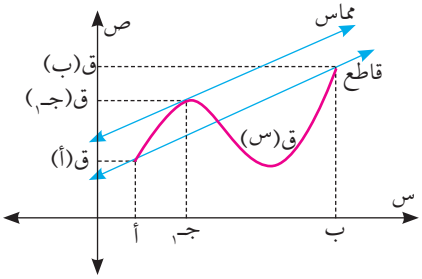
هل ق(س) متصل في [أ ، ب]، وقابل للاشتقاق في]أ ، ب[؟

ما ميل القاطع الواصل بين النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب))؟

هل ميل مماس المنحنى عند س = جـ١

يساوي ميل القاطع؟ ..... (لماذا؟)

هل يوجد في الشكل مماسات أخرى لها نفس الميل؟



نظرية القيمة المتوسطة:

إذا كان ق(س) اقترانا متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[

فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث أن $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

مثال ٦ : بيّن أن الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−٢ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل : نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [−٢ ، ١]

الاقتران ق(س) متصل في الفترة [−٢ ، ١]، وقابل للاشتقاق في الفترة]−٢ ، ١[لأنه كثير حدود، إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [−٢ ، ١]

يوجد على الأقل جـ ∈]−٢ ، ١[بحيث $ق'(جـ) = \frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)}$

ومنها $٣جـ^{٢} = \frac{٢ - (-٧)}{٣}$ أي أن جـ = ± ١

ومنها جـ = −١ ∈]−٢ ، ١[.....(لماذا ؟)

* تنسب نظرية القيمة المتوسطة للرياضي الفرنسي لاغرانج Lagrange (١٧٣٦-١٨١٣)

مثال ٧ : إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\begin{cases} أس + ب ، & -٣ \leq س \leq -١ \\ -س^{٢} ، & -١ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−٣ ، ٥] ، جد الثابتين أ ، ب.

الحل : بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [−٣ ، ٥] فإن:

ق(س) متصل على [−٣ ، ٥] ومنه ق(س) متصل عند س = −١

أي أن: −أ + ب = −١ ..... (١)

كما أن: ق(س) قابل للاشتقاق في]−٣ ، ٥[:

ق$'$(س) = $\begin{cases} أ ، & -٣ < س \geq -١ \\ -٢س ، & -١ < س < ٥ \end{cases}$ ، أ ، ب ∈ ح

وتكون ق$'$(−١)$^{+}$ = ق$'$(−١)$^{-}$ وينتج أن: أ = ٢

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١) ينتج أن ب = ١

مثال ٨ : ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠ ، ١]، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).

الحل : نكتب الاقتران ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = $\begin{cases} ١ ، & ٠ \leq س < \frac{١}{٢} \\ ٢ ، & \frac{١}{٢} \leq س < ١ \\ ٣ ، & س = ١ \end{cases}$ ومنها ق$'$(س) = $\begin{cases} ٠ ، & ٠ < س < \frac{١}{٢} \\ ٠ ، & \frac{١}{٢} < س < ١ \end{cases}$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [٠ ، ١]

ق(س) غير متصل في [٠ ، ١] (لماذا؟)

ق(س) غير قابل للاشتقاق في]٠ ، ١[(لماذا؟)

لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠ ، ١] ، وهذا لا يعني عدم وجود قيم لـ جـ، وللبحث عن قيمة / قيم جـ (إن وجدت)

ق$'$(جـ) = $\frac{ق(١) - ق(٠)}{١ - ٠}$ = ٢

لكن ق$'$(س) ≠ ٢ ، ∀ س ∈]٠ ، ١[، وبالتالي لا يوجد جـ ∈]٠ ، ١[

تمارين ٢ - ١

١ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت).

أ ق(س) = $\sqrt{٤س - س^{٢}}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

ب ق(س) = $س^{٢} - ٢س - ٣$ ، س ∈ [-١ ، ٣]

جـ ق(س) = لـو$_{هـ}$(س + $\frac{١}{س}$) ، س ∈ [$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

د ق(س) = جا٢س + ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

٢ بيّن أيّاً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت):

أ ق(س) = $س^{٣} - س - ١$ ، س ∈ [-١ ، ٢]

ب ق(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ، س ∈ [-١ ، ٢]

جـ ق(س) = $\sqrt{س} + ٢س$ ، س ∈ [٤ ، ٩]

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٢س & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣} - ب س + ١٢ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣] ، جد قيم الثابتين أ ، ب، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

٤ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [أ ، ب] ، س > صفر، فأثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الاقل جـ ∈] أ ، ب [، بحيث جـ^{٢} = أ . ب

٥ إذا كان ع(س) = (ق ٥ هـ)(س)، س ∈ [أ ، ب]، ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان هـ(أ)= ب، هـ(ب) = أ.

أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث ع(أ) - ع(ب) = ق(جـ)(ب - أ)

٦ إذا كان ق(س) = س جتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتاس.

نشاط ١ :

أراد أحد المغامرين السير بسيارته على شارع فوق سلسلة الجبال التي تراها في الصورة، مبتدئاً من النقطة (أ) ومنتهياً بالنقطة (و)، بحيث يلتزم بخط السير الظاهر في الصورة.
تلاحظ أن السيارة أثناء سيرها بين (أ) ، (ب) تكون في حالة صعود.
حدد نقطتين على الصورة تكون السيارة بينهما في حالة نزول. إذا كانت إحداثيات النقطة ب(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) وإحداثيات النقطة جـ(س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)، أيهما أكبر ص$_{٢}$ أم ص$_{١}$ ؟

تعريف:

يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب] ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈ [أ ، ب]

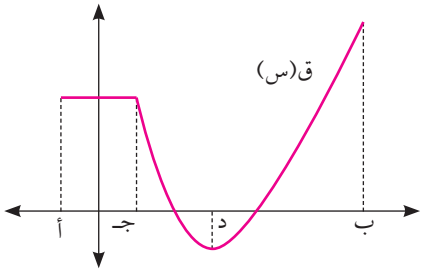
١ متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) < ق(س$_{٢}$)

٢ متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) > ق(س$_{٢}$)

٣ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإن ق(س$_{١}$) = ق(س$_{٢}$)

مثال ١ :

في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.



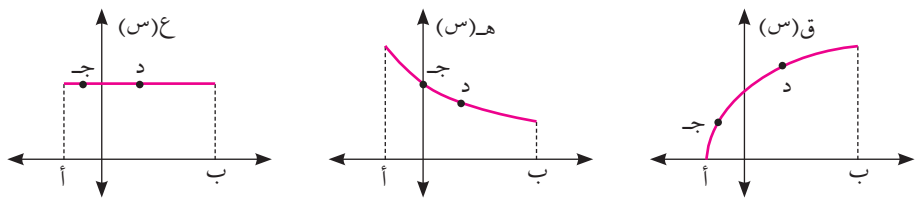
الحل :

يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، جـ] ويكون متناقصاً في [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د ، ب] (لماذا؟)

(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى

نشاط ٢: الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب] ، معتمداً عليها قم بما يأتي:



١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].

٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.

٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي .....

٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي ..... (لماذا؟)

٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) في] أ، ب[؟

٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في] أ، ب[فإن منحنى :

١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ∀ س ∈] أ، ب [

٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ∀ س ∈] أ،ب [

مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

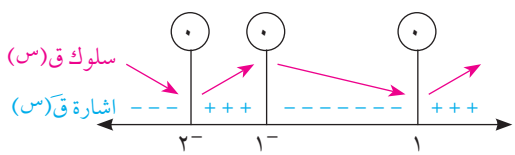
قَ(س) = (س^{٢} − ١)(س + ٢)، س ∈ ح

الحل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س^{٢} − ١)(س + ٢) = ٠

ومنها (س − ١) (س + ١) (س + ٢) = ٠

فينتج أن س = ١ أو س = −١ أو س = −٢

من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون:



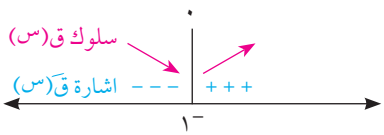
منحنى ق(س) متناقصاً في]−∞ ، −٢] ، [−١ ، ١] ، ومتزايداً في [−٢ ، −١] ، [١، ∞[.

مثال ٣ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٤} + ٤ س + ٥، س ∈ ح

الحل : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤ س^{٣} + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س^{٣} + ١ = ٠ فتكون س = −١ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور:



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة]−١ ، ∞[

ومتناقصاً في الفترة]−∞ ، −١[.

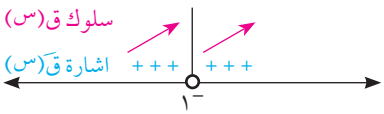
مثال ٤ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ −١

الحل : ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ −١ متصل في ح − {−١}

قَ(س) = $\frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

قَ(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح − {−١}

والشكل المجاور يبيّن إشارة قَ(س)



ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين]−∞ ، −١[،]−١، ∞[

فكّر وناقش

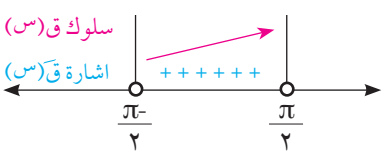
في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح − {−١}؟

مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة $\left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$ (لماذا؟)

قَ(س) = (٢ + قا^{٢}س) ≠ ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة $\left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = |س^{٢} − ٤| ، س ∈ [−٣ ، ٢]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة. ❋

$$\text{ق}(س) = |س^{٢} - ٤| = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، \ -٣ \leq س < -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، \ -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

ق(س) متصل في الفترة [−٣ ، ٢] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

$$\text{ق}'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \ -٣ < س < -٢ \\ -٢س & ، \ -٢ < س < ٢ \end{cases}$$

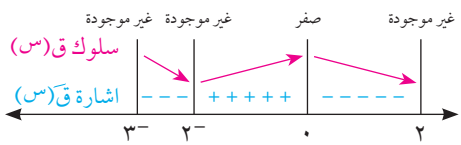
ق'(س) غير موجودة عندما س = −٣ ، −٢ ، ٢ (لماذا؟)

نجعل ق'(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة ق'(س) في الشكل المجاور يكون

منحنى ق(س) متزايداً في [−٢ ، ٠]

ومتناقصاً في [−٣ ، −٢] ، [٠ ، ٢]



❋ سنقتصر دراستنا على الاقترانات معتددة القاعدة والمتصلة.

تمارين ٢ - ٢

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} ، س ∈ [−٢ ، ٥]

ب ق(س) = س + جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

جـ ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$ ، س ∈ ح

٢ إذا كان ق(س) = ٢س − لـو$_{هـ}$ (س + ١) ، س > −١، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح$^{+}$.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}^{٢} - ١ & ، \ ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ، في الفترة [٠، ٢]

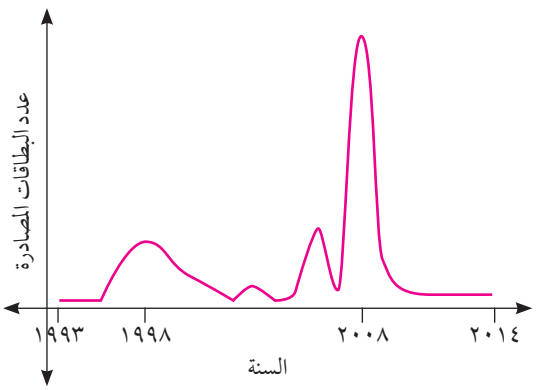
٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) = ق^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س) = −ق(س).

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح، وكان ك(س) = ق(س^{٢} − ٤س)، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س).

٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠، ٤]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠، ٤].

٧ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ \ ، \ \frac{\pi}{٢}\right]$، فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران قَ(س).

نشاط ١: تعرض آلاف الفلسطينيين المقدسيين إلى فقدان حق الإقامة في مدينتهم القدس، منذ زمن طويل، والشكل المجاور يمثل مخططاً بيانياً لعدد بطاقات الهوية المقدسية المصادرة خلال الأعوام ١٩٩٣-٢٠١٤.



كان عدد البطاقات المصادرة عام ٢٠٠٨ أكبر ما يمكن. (لماذا؟)

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١ قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٢ قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٣ قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

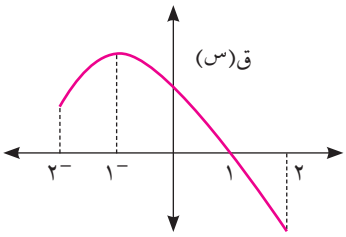
٤ قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

فكّر وناقش

هل كل قيمة قصوى محلية هي قيمة قصوى مطلقة، أم العكس هو الصحيح؟

مثال ١ : يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [−٢ ، ٢]، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



الحل : يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = −٢ هي ق(−٢)

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف =]−٣ ، −١[تحوي العدد −٢

بحيث أن ق(−٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ ف ∩ [−٢ ، ٢] = [−٢ ، −١[

قَ(−٢) غير موجودة (لماذا؟)

وأيضاً ق(−١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق(−١) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]

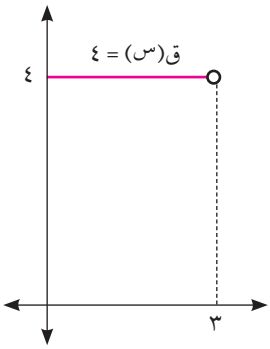
قَ(−١) = ٠ (لماذا؟)

ق(٢) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(٢) ≤ ق(س) ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]

قَ(٢) غير موجودة (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠ ، ٣[

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).



الحل : ق(س) متصل في [٠ ، ٣[

قَ(س) = ٠ ∀ س ∈]٠ ، ٣[

وحسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≥ ٤ ∀ س في تلك الفترة

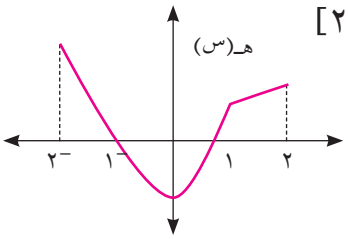
كما أنه حسب التعريف ∀ س ∈ [٠ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≤ ٤ ∀ س في تلك الفترة

فكّر وناقش:

ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س) في الفترة [−٢ ، ٢]



١ يوجد قيمة عظمى محلية عند س = −٢ والسبب .....

٢ عند س = ٠ يوجد قيمة ..... محلية والسبب .....

٣ هـَ(٢) = ... ، هـَ(٠) = ... ، هـَ(−٢) = ...

تعريف:

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١ أ ∈ مجال ق(س)

٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

مثال ٣: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، \ -١ < س \leq ٢ \\ ٣ - س & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، في]−١ ، ٣[

الحل: ق(س) متصل عند س = ٢ ، قَ(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \ -١ < س < ٢ \\ -١ & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

قَ(٢) غير موجودة ، قَ(٣) غير موجودة، ..... (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠ ∈]−١ ، ٢[

لا يوجد قيم لـ س ∈]٢ ، ٣[بحيث قَ(س) = ٠ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند س = −١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي (٠ ، −٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

مثال ٤: عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \ ١ \leq س \leq ٢ \\ [٣ + س] & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، في [١ ، ٣]

الحل: نكتب ق(س) دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح

ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \ ١ \leq س \leq ٢ \\ ٥ & ، \ ٢ < س < ٣ \\ ٦ & ، \ س = ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [١ ، ٣]

ق(س) غير متصل عند س = ٢، وعند س = ٣ ومنها قَ(٢) غير موجودة، قَ(٣) غير موجودة،

كذلك قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

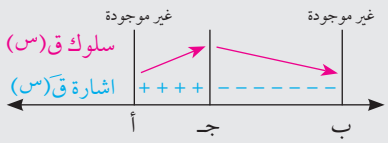
$$\text{قَ}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، \ ١ < س < ٢ \\ ٠ & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases} \quad ، \ س \in]١ ، ٣[$$

$\forall$ س $\in$]٢ ، ٣[$\cup$ {١} فإن (س ، ق(س)) نقطة حرجة للاقتران ق(س). (لماذا؟)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ $\in$]أ ، ب[فإنه:

١ إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)



٢ إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ،
وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب
فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

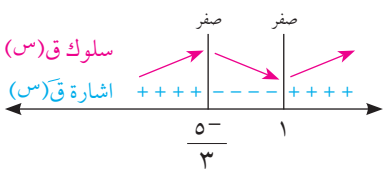
مثال ٥ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥س − ٥

الحل : ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ، $\forall$ س $\in$ ح ، نجعل قَ(س) = ٠

ومنها ٣س^{٢} + ٢س − ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س − ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{-٥}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون



ق($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٤٠}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = −٨ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

فكّر وناقش:

هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = (٨ – س) $\sqrt[3]{\text{س}}$

الحل : ق(س) متصل في ح

$$ق`(س) = \sqrt[3]{\text{س}}\ (-١) + (٨ - \text{س}) \times \frac{١}{٣}\ \text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$ق`(س) = -\sqrt[3]{\text{س}} + \frac{(٨ - \text{س})}{٣\sqrt[3]{\text{س}^{٢}}}\ ،\ \text{س} \in ح - \{٠\}\ \text{(لماذا؟)}$$

$$\text{إذن } ق`(س) = \frac{(٨ - ٤\text{س})}{٣\sqrt[3]{\text{س}^{٢}}}$$

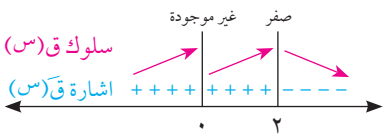
نجعل ق`(س) = ٠ ومنها ٨ – ٤س = ٠ ومنها س = ٢

ق`(س) غير موجودة عند س = ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة ق`(س) في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند س = ٢

قيمتها ق(٢) = ٢ $\sqrt[3]{٦}$



فكّر وناقش:

هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

مثال ٧ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١

الحل : ق(س) متصل في ح – {١}

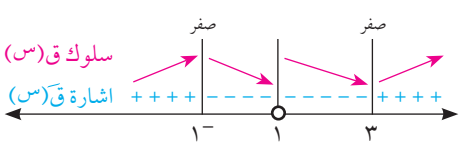
$$ق`(س) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}{(\text{س} - ١)^{٢}}\ ،\ \text{س} \neq ١$$

وبوضع ق`(س) = ٠ ينتج أن س = ٣ أو س = –١

ومن إشارة ق`(س) في الشكل المجاور تكون

ق(–١) = –٢ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



مثال ٨ : إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = -١ قيمتها ٢ وقيمة صغرى محلية عند س = ١ قيمتها -١ ، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ ، د.

الحل :

ق(-١) = ٢ ومنها ٢ = $-$أ + ب $-$ جـ + د ..... (١)

ق(١) = -١ ومنها -١ = أ + ب + جـ + د ..... (٢)

قَ(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

قَ(-١) = ٠ ومنها ٣أ $-$ ٢ب + جـ = ٠ ..... (٣)

قَ(١) = ٠ ومنها ٣أ + ٢ب + جـ = ٠ ..... (٤)

بحل النظام الناتج من المعادلات الأربع فإن:

$$أ = \frac{٣}{٤} ، ب = ٠ ، جـ = \frac{-٩}{٤} ، د = \frac{١}{٢}$$

اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س < أ (بداية تزايد)

٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س < أ (بداية تناقص)

٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س > ب (نهاية تزايد)

٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س > ب (نهاية تناقص)

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ -١ \leq س \leq ٢ \\ ٤ & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

٢ حدّد الاحداثيات السينية للقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [-١ ، ٣[

قَ(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \ -١ < س < ٢ \\ ٠ & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

أولاً: عندما س ∈]−١ ، ٢[نجعل قَ(س) = ٠

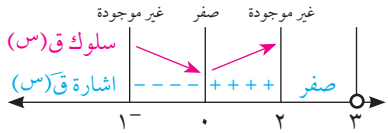
فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة

ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون قَ(س) = ٠

وهذا يعني أنه عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد نقطة حرجة

قَ(٢) غير موجودة، قَ(−١) غير موجودة

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة { ٠ ، −١،]٢ ، ٣[}



٢ من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون

عند س = −١ يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص

عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى محلية

عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى محلية

عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٢لـو$_{هـ}$ س ، س ∈]٠ ، ٥] ،

فحدد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

الحل : ق(س) متصل في الفترة]٠ ، ٥] ، قَ(س) = ٢س − $\frac{٢}{س}$

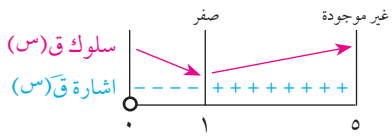
نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٢س − $\frac{٢}{س}$ = ٠

أي أن س^{٢} = ١ وتكون س = ١ (لماذا؟)

قَ(٥) غير موجودة، فتكون مجموعة قيم س التي يكون

عندها نقط حرجة هي {١ ، ٥}

من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور



ق(١) = ١ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

ق(٥) = ٢٥ − ٢لـو$_{هـ}$ ٥ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) (نهاية تزايد)

مثال ١١ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \ -١ \leq س < ١ \\ \frac{١}{٢} & ، \ س = ١ \end{cases}$ ، س ∈ [−١ ، ١]

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل : ق(س) متصل في [−١ ، ١]

قَ(س) = ٣س^{٢} ، س ∈]−١ ، ١[

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور

عند س = −١ يوجد قيمة صغرى محلية، قيمتها ق(−١) = −١

أما عند س = ١ فإن ق(س) منفصل، فلا يمكن الحكم عليها من خلال إشارة المشتقة الأولى؛ لذا نلجأ إلى مقارنة ق(١) مع نهـــا ق(س) وبما أن ق(١) > نهـــا ق(س) فإن ق(١) = $\frac{١}{٢}$ قيمة صغرى محلية.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].

مثال ١٢ : جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = س$\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل : بحل المتباينة ٤ – س^{٢} ≥ ٠ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو [−٢ ، ٢]

ق(س) متصل على [−٢ ، ٢] ، ق$'$(س) = $\frac{٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٢ ، ٢[

وعندما ق$'$(س) = ٠ يكون س = $\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

س = −$\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

ويكون ق(−٢) = ٠ ، ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

ق($\sqrt{٢}$) = ٢ ، ق(٢) = ٠

أصغر قيمة للاقتران هي ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

وأكبر قيمة للاقتران هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي ق($\sqrt{٢}$) = ٢

والصغرى المطلقة هي ق(−$\sqrt{٢}$) = −٢

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ٢ - ٣

١ جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

ب ق(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [−٨ ، ٨]

٢ في التمارين من (أ − و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ ق(س) = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س ، س ∈ ح

ب ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

جـ ق(س) = (س^{٢} − ٣)هـ^{س} ، س ∈ ح

د ق(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

هـ ق(س) = جتا^{٢}س − جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

و ق(س) = هـ$^{-(س - ٢)^{٢}}$ ، س ∈ ح

٣ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية:

أ ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = هـ^{س} − هـ س ، س ∈ [٠ ، ٣]

جـ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ جتاس − جتا^{٣}س ، س ∈ $\left[\frac{π}{٢} ، \frac{٣π}{٢}\right]$

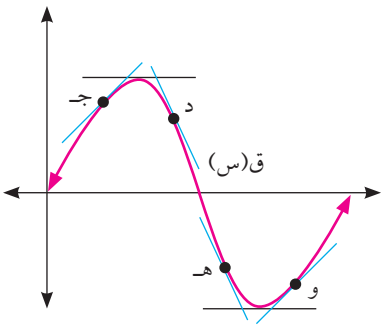
٤ إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، أ ، ب ∈ ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٥ باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار ٤س^{٣} − س^{٤} − ٢٩ سالب دائماً.

نشاط ١: تزخر فلسطين بالأماكن الترفيهية وتحتوي بعض هذه الأماكن ألعاباً مرعبة، مثل القطار الموجود في الصورة المجاورة. هل سبق وركبت مثل هذا القطار؟

حدد مستعيناً بالرموز المدرجة على الصورة المناطق التي يشعر فيها راكب القطار بالرعب والخطر، والمناطق التي تكون أكثر أماناً. فسّر إجابتك.

نشاط ٢: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



١ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من جـ ، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند جـ ، د يقعان فوق منحناه)

٢ ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ ، و يقعان تحت منحناه).

تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة] أ، ب[وأنه مقعّر للأسفل في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة] أ، ب[.

اختبار التقعّر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة]أ ، ب[، وكان قً (س) معرفاً في الفترة]أ ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون:

١ مقعّراً للأعلى في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) > ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

٢ مقعّراً للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

٣ غير مقعّر للأعلى أو للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) = ٠ لجميع قيم س ∈] أ، ب[.

* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

مثال ١ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – س^{٣} ، س ∈]–٢ ، ٥[

الحل : ق(س) متصل في]–٢ ، ٥[لأنه كثير حدود

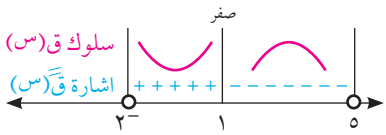
قَ(س) = ٦س – ٣س^{٢} ، قً(س) = ٦ – ٦س

بوضع قً(س) = ٠ تكون ٦ – ٦س = ٠ ، أي س = ١

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في الفترة]–٢، ١[، ومقعّراً للأسفل في الفترة]١ ، ٥[



مثال ٢ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢}+١}{س}$ ، س ≠ ٠

الحل : ق(س) متصل على مجاله

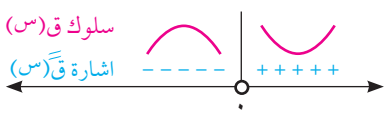
ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ ومنها قَ(س) = ١ – $\frac{١}{س^{٢}}$

قً(س) = $\frac{٢}{س^{٣}}$ ≠ ٠ ،

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:

منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في الفترة]–∞ ، ٠[،

ومقعّراً للأعلى في الفترة]٠ ، ∞[..... (لماذا؟)



مثال ٣ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = لـــو$_{هـ}$ جتاس ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[مقعر للأسفل.

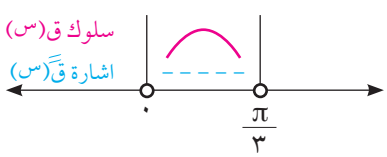
الحل : ق(س) متصل في]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[(لماذا؟)

قَ(س) = $\frac{-جاس}{جتاس}$ = –ظاس

قً(س) = –قا^{٢}س

وبما أن قً(س) ≠ ٠ ، قً(س) < ٠ ، ∀ س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[

فإن ق(س) مقعّر للأسفل في]٠ ، $\frac{\pi}{٣}$[



تعريف:

١ تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغيّرَ الاقتران اتجاه تقعّر منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.

٢ زاوية الانعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف.

٣ إذا كانت (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان قَ(جـ) = ٠ فتسمى النقطة (جـ، ق(جـ)) نقطة انعطاف أفقي.

مثال ٤ : جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈]٠ ، π[

الحل :

قَ(س) = -٣جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س = ٣جتا٢س ، س ∈]٠ ، π[

قً(س) = -٦جا٢س

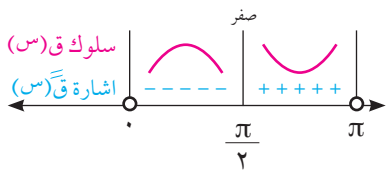
نجعل قً(س) = ٠ فيكون -٦جا٢س = ٠ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$

وبما أن ق(س) متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من

اتجاه تقعّره عندها (كما تشير إشارة قً(س) في الشكل المجاور)

فإن النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$)) = ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف

هل النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) نقطة انعطاف أفقي؟ فسّر إجابتك.



مثال ٥ : بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ نقطة انعطاف في الفترة]-٣ ، ٣[

الحل :

ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ متصل في الفترة]-٣ ، ٣[

قَ(س) = $\frac{-س}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$ ، س ∈]-٣ ، ٣[(لماذا؟)

قً(س) = $\frac{-٩}{\sqrt{(٩ - س^{٢})^{٣}}}$ ≠ ٠ ، ∀ س ∈]-٣ ، ٣[ولكن قً(س) < صفر دائماً (لماذا؟)

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في]-٣ ، ٣[

وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في]-٣ ، ٣[

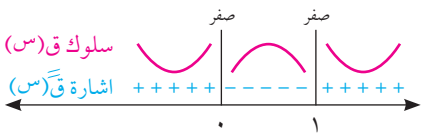
مثال ٦ : إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط وزوايا الانعطاف (إن وجدت).

الحل : ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} ، قً(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س

بوضع قً(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة]−∞ ، ٠[،

وكذلك في الفترة]١ ، ∞[

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة]٠ ، ١[

النقطتان (٠ ، ٠) ، (١ ، −١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

لإيجاد زوايا الانعطاف

نفرض هـ$_{١}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (٠ ، ٠)

ظا هـ$_{١}$ = قَ(٠) = ٠ ومنها هـ$_{١}$ = ٠ أو ٠ + ٢ن π

نفرض هـ$_{٢}$ زاوية الانعطاف عند النقطة (١ ، −١)

ظا هـ$_{٢}$ = قَ(١) = −٢ ومنها هـ$_{٢}$ = ظا$^{-١}$(−٢) أو ظا$^{-١}$(−٢) + ٢ن π

مثال ٧ : عيّن مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ٠ < \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}^{٢} & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

الحل : ق(س) غير متصل عند س = ٢ ومنها قَ(٢) غير موجودة

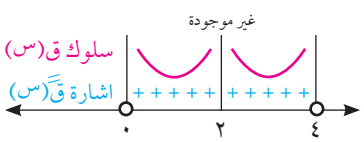
قَ(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$ ، قً(س) = $\begin{cases} ٦\text{س} & ، \ ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \ ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

١ قً(س) = ٠ ، عندما ٠ < س < ٢

فيكون ٦س = ٠ ومنها س = ٠ ترفض (لماذا؟)

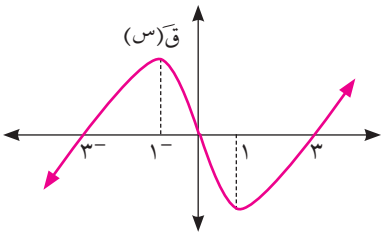
٢ عندما ٢ < س < ٤ فإن قً(س) ≠ ٠ (لماذا؟)

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون



منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى في]٠ ، ٢[كذلك في]٢ ، ٤[

مثال ٨ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س)



معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:

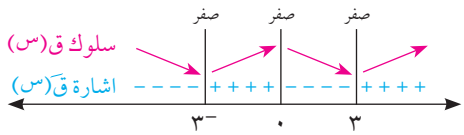
١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

٣ مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

٤ قيم س التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت) .

الحل : نمثل إشارة قَ(س) كما في الشكل المجاور:



١ يكون منحنى ق(س)

متزايداً في]-٣ ، ٠[وفي]٣ ، ∞[

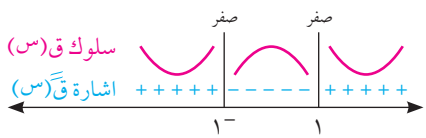
ومتناقصاً في]-∞ ، -٣[وفي]٠ ، ٣[

٢ ق(-٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة قَّ(س) كما في الشكل المجاور:



٣ يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في]-∞ ، -١[وكذلك في]١ ، ∞[

ومقعّراً للأسفل في]-١ ، ١[

٤ نقاط الانعطاف تكون عند س = -١ ، س = ١ ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س١ ، ق(س١)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإن قَ(س١) = صفر.

نشاط ٢: إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) وله نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (٢ ، ١)، جد قاعدة الاقتران ق(س)

نفرض أن ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح ، أ ≠ ٠

بما أن ق(٠) = ٥ فإن قيمة الثابت د هي .....

وبما أن (٢ ، ١) نقطة انعطاف أفقي فإن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = ٠ ، قً(٢) = ...

ق(٢) = ١ ومنها ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ ..... (١)

قَ(س) = ...

قَ(٢) = ٠ ومنها ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠ ..... (٢)

قً(س) = ...

قً(٢) = ... ومنها ..... (٣)

وبحل المعادلات الناتجة يكون الاقتران ق(س) = ...

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:

١ ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قً(جـ) < ٠

٢ ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قً(جـ) > ٠

٣ يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو قً(جـ) غير موجودة.

مثال ٩ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^{٤} − ٨س^{٣} + ٦س^{٢}، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٣} − ٢٤س^{٢} + ١٢س

قَ(س) = ٠ ومنها ١٢س^{٣} − ٢٤س^{٢} + ١٢س = ٠

١٢س(س^{٢} − ٢س + ١) = ١٢س(س − ١)^{٢} = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س = ١

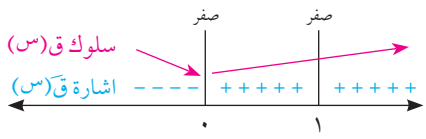
ق$''$(س) = ٣٦س^{٢} – ٤٨س + ١٢

ق$''$(٠) = ١٢ > ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية.

بما أن ق$''$(١) = ٠ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى ق(١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية

لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.

من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى محلية عند س = ١ ..... (لماذا؟)



تمارين ٢ – ٤

١ عيّن فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق$'$(س) = (س^{٢} – ٣س – ٤)(س + ٢) ، س ∈ ح

ب ق$'$(س) = جاس – س ، س ∈ $\left]-\frac{\pi}{٢}\ ،\ \frac{\pi}{٢}\right[$

جـ ق(س) = ٤س^{٣} – س^{٤} + س ، س ∈]٠ ، ٤[

د ق(س) = (س – ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، س > ٣

هـ ق(س) = جا $\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠ ، π[

و ق(س) = هـ$^{-س}$ جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

ز ق(س) = $\begin{cases} \left[\frac{١}{٣}\ س - ١\right] & ، \ ١ < س \geq ٣ \\ س^{٣} & ، \ ٣ < س < ٥ \end{cases}$

٢ حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = س^{٣} + س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

جـ ق(س) = $\sqrt[٣]{٥ - س}$

٣ جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

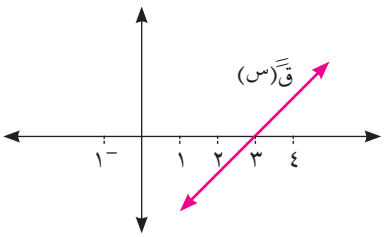
أ ق(س) = س^{٣} + ٦س^{٢}

ب ق(س) = |س + ٦|

٤ إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٢} + س^{٣} نقطة انعطاف عند س = −١ ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س)

إذا علمت أن قَ(٠) = قَ(٦) = ٠ ، جد كلاً مما يأتي:



أ فترات التقعّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٦ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ بحيث إن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي: ٣س + ص = ٧ ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

٧ إذا كان للاقتران كثير الحدود ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ك(س) نقطة انعطاف أفقي هي (١ ، ٢) ، وكان ع(س) = ك^{٢}(س)، احسب عَ(١).

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [−٣ ، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، قَ(١) = ٠ ، قَ(−٢) = ٠ ، قَ(س) > ٠ عندما س > ٠ ، قَ(س) < ٠ عندما س < ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

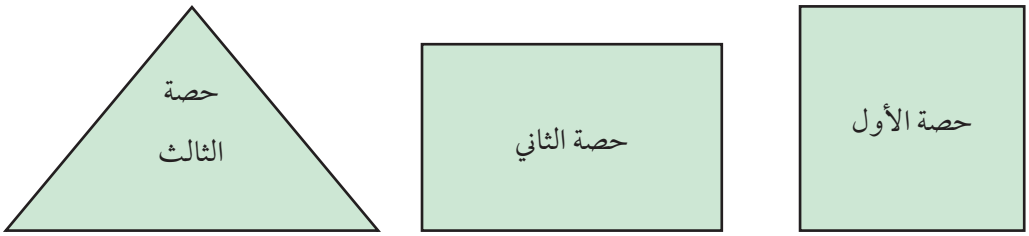
أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

جـ ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

نشاط ١: أحمد مزارع فلسطيني يسكن مدينة يافا، ويملك أراضٍ واسعةٍ من حقول البرتقال، أراد في أحد الأيام أن يختبر ذكاء أبنائه الثلاثة، فاشترى سياجاً طويلاً وقسّمَه إلى ثلاثة أجزاء متساوية في الطول، وأعطى كلاً منهم جزءاً من السياج، وطلب أن يحيط كل واحد منهم جزءاً من الأرض بالسياج الذي أخذه؛ لتصبح الأرض التي أحاطها ملكاً له. سرَّ الأبناء بهدية والدهم، وأراد كل منهم أن يحصل على أكبر مساحة ممكنة فاختار أحدهم جزءاً مربعاً من الأرض، واختار الثاني جزءاً مستطيلاً، أما الثالث فقد اختار جزءاً على شكل مثلث متساوي الساقين.

لو كنت أحد الأبناء، ما الشكل الذي ستختاره ؟ (ولماذا؟)



نشاط ٢: قررت إحدى بلديات الوطن إنشاء مُتَنَزَّهٍ على شكل مستطيل، باسم الشهيد الراحل ياسر عرفات، أمام مبنى المقاطعة الذي دمره الاحتلال. وقد لاحظ مهندسو البلدية وجود شارعين متقاطعين وقرروا أن يكون رأسان من رؤوس المتنزه على الشارعين، والرأسان الآخران على شارع الشهداء (انظر الشكل) فإذا كانت معادلة الشارع الأول (شارع الأمة) على الخريطة هي ص = هـ(س) = ٢٠س ومعادلة الشارع الثاني (شارع الكرامة) هي ص = ق(س) = ٤٢ – س وشارع الشهداء أفقي معادلته ص = ٠، فلمعرفة مساحة أكبر متنزه يمكن إنشاؤه نتبع ما يلي:

نفرض أن طول المتنزه (س)

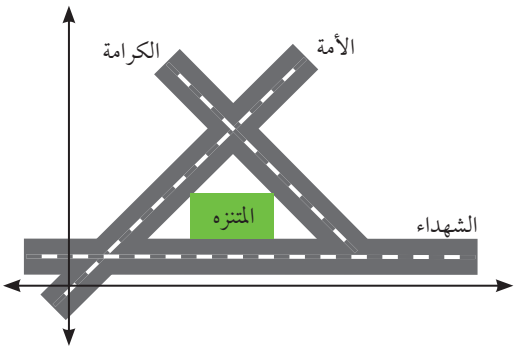
فيكون عرضه هو هـ(ع) = ٢٠ع

وتكون مساحة المتنزه = الطول × العرض

أي أن م = س × ٢٠ع = ٢٠س ع (لماذا؟)

لكن هـ(ع) = ق(س + ع) (لماذا؟)

ومنها فإن ٢٠ع = ٤٢ – س – ع (لماذا؟)



أي أن ع = ... وتصبح المساحة م(س) = $\frac{٢٠}{٢١}$ س (٤٢ – س)

ولتحديد أكبر قيمة للمساحة فإننا نستخدم مفهوم القيم القصوى

مَ = ... ومنها س = ...

وللتأكد من أن قيمة س السابقة تجعل المساحة أكبر ما يمكن نجد مً ونكمل الحل.....

إذن مساحة أكبر متنزه = ...

مثال ١ : عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن العددين هما س ، ص وأن حاصل ضربهما هو م فيكون

م = س × ص

لكن س + ص = ٦٠ ومنه ص = ٦٠ – س

م = س × ص = س × (٦٠ – س) = ٦٠س – س^{٢}

مَ = ٦٠ – ٢س

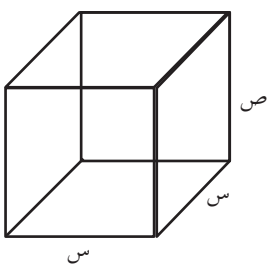
نجعل مَ = ٠ ومنها ٦٠ – ٢س = ٠ أي س = ٣٠

للتحقق مً = -٢ ومنها مً $\Big|_{س = ٣٠}$ = $-٢ < ٠$

(عند س = ٣٠ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠ ، ٣٠

مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ دسم^{٣}، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر المربع ثابت)



الحل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س^{٢}ص ومنها س^{٢}ص = ٨

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

ت = ٤س × ص + ٢س^{٢} ، لكن ص = $\frac{٨}{س^{٢}}$

ومنها ت = ٤س × $\frac{٨}{س^{٢}}$ + ٢س^{٢} = $\frac{٣٢}{س}$ + ٢س^{٢}

وبالاشتقاق ينتج أن: تَ = $\frac{-٣٢}{س^{٢}}$ + ٤س وبوضع تَ = ٠

$\frac{٣٢}{س^{٢}}$ = ٤س ، أي أن س^{٣} = ٨ ، ومنها س = ٢دسم

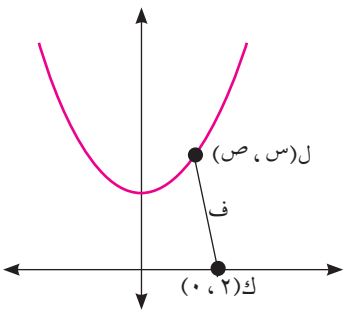
تً = $\frac{٦٤}{س^{٣}}$ + ٤

ومنها $\left|تً\right|_{س=٢}$ = $\frac{٦٤}{٨}$ + ٤ = ١٢ > ٠ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها ٢دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.

مثال ٣ : جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة ص^{٢} – س^{٢} = ٨

الحل : نفرض النقطة ل(س ، ص) على منحنى العلاقة



ونفرض ف = المسافة بين ك ، ل

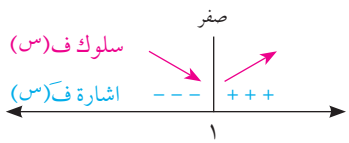
حسب قانون المسافة بين نقطتين ف = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + ص^{٢}}$

لكن ص^{٢} = س^{٢} + ٨ ، فتكون ف = $\sqrt{٢س^{٢} - ٤س + ١٢}$

فَ = $\frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ٤س + ١٢}}$

بوضع فَ = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)

ومن إشارة فَ في الشكل المجاور



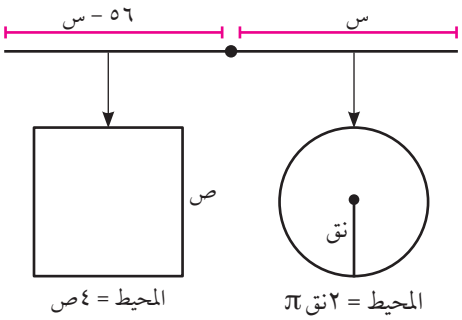
تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ± ٣

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي ف = $\sqrt{١٠}$ وحدة.

مثال ٤ : سلك طوله ٥٦سم قسم إلى جزأين، ثني أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن؟

الحل : نفرض طول الجزء الذي صنع منه دائرة (س)



فيكون طول الجزء الثاني ٥٦ – س

$س = ٢نق\pi$ ومنها $نق = \frac{س}{٢\pi}$

كما أن $٥٦ - س = ٤ص$ ومنها $ص = ١٤ - \frac{١}{٤}س$

مجموع مساحتيهما $م = نق^{٢}\pi + ص^{٢}$

$$م = \frac{س^{٢}}{٤\pi} + \left(١٤ - \frac{١}{٤}س\right)^{٢}$$

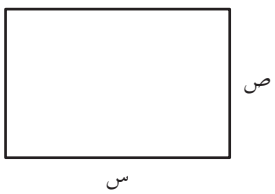
$$\text{ومنها } م' = \frac{٢س}{٤\pi} + ٢\left(١٤ - \frac{١}{٤}س\right)\left(-\frac{١}{٤}\right) = \frac{س}{٢\pi} + \frac{١}{٨}س - ٧$$

نضع $م' = ٠$ ومنها $\frac{س}{٢\pi} + \frac{١}{٨}س - ٧ = ٠$ وبعد التبسيط ينتج أن $س = \frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}$

$$\text{ومنها } نق = \frac{٢٨}{٤ + \pi}، ص = ١٤ - \frac{١}{٤}\left(\frac{٥٦\pi}{٤ + \pi}\right) = ١٤ - \frac{١٤\pi}{٤ + \pi} = \frac{٥٦}{٤ + \pi}$$

$م'' = \frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨} > ٠$ (يوجد قيمة صغرى محلية، وبما أنها وحيدة فهي صغرى مطلقة)

مثال ٥ : أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^{٢}



الحل : نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

مساحة المستطيل $م = س ص = ١٦$ ومنها $ص = \frac{١٦}{س}$

محيط المستطيل $ح = ٢س + ٢ص$ ومنها يكون $ح = ٢س + \frac{٣٢}{س}$

$ح' = ٢ - \frac{٣٢}{س^{٢}}$ وعندما $ح' = ٠$ يكون $٢ - \frac{٣٢}{س^{٢}} = ٠$ ومنها $س = ٤$

$ح'' = \frac{٦٤}{س^{٣}}$ ومنها $ح''(٤) = ١$ (موجب) ⟵ المحيط أقل ما يمكن

فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

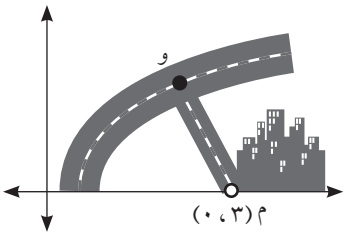
تمارين ٢ - ٥

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم^{٣} فإذا علمت أن سعر كل ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم^{٢} من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي

ص = ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ ، النقطة م(٣ ، ٠) تمثل موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى(م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن . (انظر الشكل المجاور).



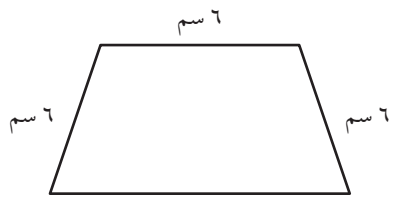
٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

ف = أ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{٤}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي ١٠ م/ ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ ، ب.

٥ في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم / الساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠كم في الساعة، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟ (علماً بأن الباخرتين تحركتا في نفس الوقت)

٦ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.

٧ شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.



٨ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ن جـ = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن.

تمارين عامة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١-١٤):

١ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، \ ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ & ، \ ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة [٠ ، ٣]؟

أ) {٠ ، ١ ، ٣} ب) {٠ ، ٣} ج) {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣} د) {٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٣}

٢ ليكن ق(س) = $\sqrt{٧ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٢ ، ٢]، فما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة عظمى مطلقة؟

أ) −٢ ب) ٠ ج) ١ د) ٢

٣ إذا كان قَ(س) = (س^{٢} − ١)^{٣} (س − ٢)^{٤} فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟

أ)]−∞ ، −١] ب) [−١ ، ١] ج) [١ ، ٢] د) [٢ ، ∞[

٤ إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٣س معرفاً في الفترة [−٣ ، ١]، فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق(س)؟

أ) −٣٦ ب) −١٨ ج) −٣ د) −٢

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود وكان قً(س) > ٠ عندما س < ٤ ، قً(س) < ٠ ، عندما س > ٤ وكان قَ(٣) = ٠ ، فما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية؟

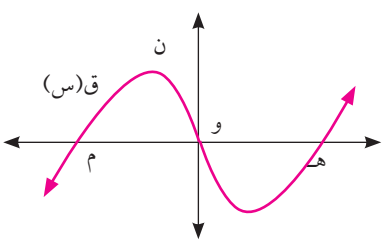
أ) قً(٣) = ٠ ب) قَ(٤) = ٠

ج) ق(٣) قيمة عظمى محلية د) ق(٣) قيمة صغرى محلية

٦ ما مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٨ في الفترة [٠ ، ١] ؟

أ) { } ب) {٠} ج)]٠ ، ١[د) [٠ ، ١]

٧ بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى ق(س)
ما النقطة التي يكون عندها قَ(س)، قً(س) موجبتين:



أ) هـ ب) ن

ج) م د) و

٨ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١ ، ٣] وكان قَ(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]١ ، ٣[، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١ ، ٣] وكان قَ(٢) = ٠، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) ق($\frac{٥}{٢}$) > ٠ ب) ق($\frac{٥}{٢}$) > ق(٢)

ج) ق($\frac{٥}{٢}$) = ق(٢) د) ق($\frac{٥}{٢}$) < ق(٢)

٩ ما قيمة الثابت م التي تجعل لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + م س^{٢} − ٩س نقطة انعطاف عند س = −١ ؟

أ) ٣ ب) ٦ ج) −٣ د) −٤

١٠ ما قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = س^{٢} + س − ٦ في [−١ ، ٢]؟

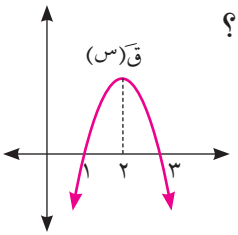
أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{-١}{٢}$

١١ إذا كان ق(س) = س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي؟

أ) قَ(١) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية د) (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

١٢ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما مجموعة حل المتباينة قَ(س) < ٠ ؟



أ)]١ ، ٣[ب)]٢ ، ∞[

ج)]−∞ ، ٢[د)]−∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

١٣ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على [أ ، ب[، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

١٤ إذا كان ق(س) = لـو جاس ، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$ ، π[، متى يكون منحنى ق(س) متزايداً؟

أ) [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[ب) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π[ج) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π[د) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π]

أجب عن الأسئلة الآتية (٢ – ١٣):

٢ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤} \right]$ أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

٣ جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٣}$.

٤ إذا كان ق(س) = س^{٢} – ٣س – أ يحقق شروط نظرية رول على [–١ ، أ] جد قيمة/ قيم الثابت أ.

٥ إذا كان ق(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س + ٥ معرفاً في الفترة]–٢ ، ٦[جد:

أ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

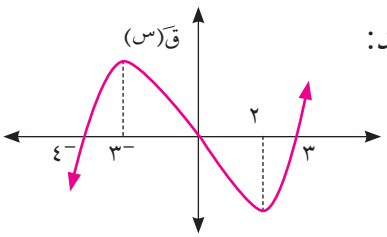
ب فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

جـ نقط الانعطاف، وزوايا الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).

٦ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران ق`(س) جد:

أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

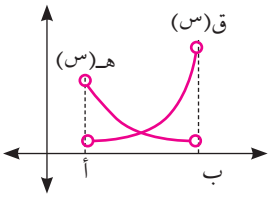


٧ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على مجاله، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ – س بيّن أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦].

٨ ما أبعاد مخروط دائري قائم ذات أكبر حجم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

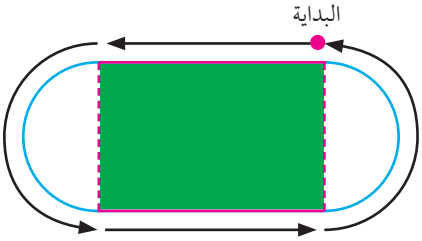
٩ إذا كان ق(س) = جتاس – هـ(س) + ٣س ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right]$، حيث هـ(س) قابل للاشتقاق، أثبت أن الاقتران (ق + هـ)(س) متزايد في تلك الفترة.

١٠ الشكل المجاور يبيّن منحنى الاقترانين ق ، هـ المعرفين على]أ ، ب[بيّن أن الاقتران $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ هو اقتران متزايد على]أ ، ب[.



١١ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن النقطة (٢ ، −١) هي نقطة قيمة صغرى محلية، وأن النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س).

١٢ مسار للسباق طوله ٤٠٠ م، يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟



١٣ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

١٤ أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
حل مسائل منوعة على نظريتي رول والمتوسطة			
تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقترانات			
تحديد مجالات التقعر للاقترانات			
حل مشكلات وتطبيقات حياتية على المشتقات			