ps.WATAD.me

موقع وتـــد التعليمي

الرائع

في الرياضيات

الأستاذ حمزه ابو هيض

الرياضيات الادبي والشرعي - المنهاج الفلسطيني

الفصل الثاني

0598 918 058

بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات القسم الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الأولى

١ المعادلات الأسية

٢ المعادلات اللوغاريتمية

٣ المتسلسلات

٤ المتسلسلات الحسابية

٥ المتسلسلات الهندسية

٦ تمارين عامة

١ المعادلات الأسية

قبل البدء في درس المعادلات الاسية ، وجب علينا مراجعة قوانين الأسس

هناك (٧) قوانين مهمة

① $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

مثال : $٢^{٢} \times ٢^{٣} = ٢^{٢+٣} = ٢^{٥}$

② $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

مثال : $\frac{٣^{٦}}{٣^{٤}} = ٣^{٦-٤} = ٣^{٢}$

③ $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

مثال : $(٢^{٣})^{٢} = ٢^{٢ \times ٣} = ٢^{٦}$

④ $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

مثال : $(٢ \times أ)^{٣} = ٢^{٣} \times أ^{٣}$

⑤ $(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

مثال : $(\frac{١}{٣})^{٢} = \frac{١^{٢}}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

⑥ $أ^{-ن} \Leftrightarrow \frac{١}{أ^{ن}}$

مثال : $٢^{-٣} \Leftrightarrow \frac{١}{٢^{٣}}$

$\frac{١}{٣^{-٤}} = ٣^{٤}$

⑦ $أ^{٠} = ١$

يعني أي عدد قوة صفر يساوي (١)

مثال:

① $١٦^{٠} = ١$ ② $٨^{٠} = ١$

③ $(\frac{١}{٢})^{٠} = ١$ ④ $١٤^{٠} = ١$

حل المعادلات الأسية

تعريف : المعادلة الأسية تكون على الشكل

$أ^{س} = أ^{ص+٢}$

مثال : $٢^{س} = ٣٢$

الحل :

نحاول هنا جعل الأساس موحد $٣٢ \leftarrow ٢^{٥}$

$\therefore ٢^{س} = ٢^{٥}$

عندما تصبح الأساسات موحدة فإن الأسس تتساوى

$٢^{س} = ٢^{٥} \Leftarrow$ س = ٥

مثال : حل المعادلات الآتية : $س^{٤} = ١٦$

الحل :

$س^{٤} = ١٦ \Leftarrow ١٦ \Leftarrow ٢^{٤}$

$س^{٤} = ٢^{٤}$ هنا تساوت الأسس فإن الأساس متساوي $\therefore$ س = ±٢ لأن الأس عدد زوجي

مثال : جد مجموعة حل المعادلات الآتية :

$٤^{س} = ١٦$

الحل :

$٤^{س} = ١٦ \Leftarrow ٦٤ \Leftarrow ٤^{٢}$

$٤^{س} = ٤^{٢}$ ومنه $\boxed{س = ٢}$

مثال : حل المعادلات الآتية : $٥^{٢س} = ٥^{٤}$

الحل :

هنا الأساس متساوٍ اذن تتساوى الأسس

$٢س = ٤$ معادلة خطية $\Leftarrow \boxed{س = ٢}$

مثال : حل المعادلات الآتية : $٥^{س+١} = ١٢٥$

الحل :

$٥^{س+١} = ١٢٥ \Leftarrow ١٢٥ = ٥^{٣}$

$٥^{س+١} = ٥^{٣}$

تساوى الأساس اذن تتساوى الأسس

$\therefore س + ١ = ٣$ $\therefore \boxed{س = ٢}$

مثال : حل كلًا من المعادلات الأسية الآتية :

(١) $٢١٦^{س+١} = ٦^{س}$

الحل :

$(٦^{٣})^{س+١} = ٦^{س}$

$٦^{٣س+٣} = ٦^{س}$ ومنه $٣س + ٣ = س$

$\therefore ٣س - س = -٣$ $\therefore ٢س = -٣$

$\therefore \boxed{س = -\frac{٣}{٢}}$

(٢) $٤^{س-١} = (\frac{١}{٨})^{٢-س}$

الحل :

$(٢^{٢})^{س-١} = (\frac{١}{٢^{٣}})^{٢-س}$

$\Leftarrow ٢^{٢س-٢} = (٢^{-٣})^{٢-س}$

$\Leftarrow ٢^{٢س-٢} = ٢^{-٣س+٦}$

ومنه $٢س - ٢ = -٣س + ٦$

$\Leftarrow ٣س - ٢س = ٦ + ٢$

$\Leftarrow س = ٤ \Leftarrow \boxed{س = ٤}$

(٣) $(\frac{١}{٤})^{س} = \frac{١}{١٦}$

الحل :

$(\frac{١}{٢^{٢}})^{س} = \frac{١}{٤^{٢}}$

$٢^{-٢س} = ٢^{-٤}$ ومنه $-٢س = -٤$

$\therefore \boxed{س = ٢}$

(٤) $(١٠٠)^{س} = ٠,٠٠١$

الحل :

$(١٠)^{٢س} = \frac{١}{١٠^{٣}}$

$(١٠)^{٢س} = ١٠^{-٣}$

ومنه $٢س = -٣$

$\therefore \boxed{س = -\frac{٣}{٢}}$

تذكر

$٠,٠٠١ = \frac{١}{١٠٠٠}$

$١٠٠٠ = ١٠^{٣}$

٥ $\left(\frac{١}{٥}\right)^{١-س} = ١٢٥$

الحل :

$(٥^{-١})^{١-س} = ٥^{٣} \Leftarrow (٥)^{-س+١} = ٥^{٣}$

ومنه $-س+١ = ٣ \Leftarrow$ $\boxed{س = -٢}$

٦ $(٣)^{س^{٢}+٣س} = \frac{١}{٩}$

الحل :

$(٣)^{س^{٢}+٣س} = ٣^{-٢}$

ومنه $س^{٢}+٣س = -٢$

$\therefore س^{٢}+٣س+٢ = ٠$

$(س+٢)(س+١) = ٠$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = -١}$

٧ $(٢)^{س-٢} \times (٢)^{٢س+١} = ٦٤$

الحل :

$(٢)^{س-٢+٢س+١} = ٢^{٦}$

$\Leftarrow س-٢+٢س+١ = ٦$

$\Leftarrow ٣س-١ = ٦ \Leftarrow ٣س = ٦+١$

$\Leftarrow ٣س = ٧ \therefore$ $\boxed{س = \frac{٧}{٣}}$

٨ $(٣)^{س+٥} \times (٣)^{٣س-٤} = ٨١$

الحل :

$(٣)^{س+٥+٣س-٤} = ٣^{٤}$

$\Leftarrow س+٥+٣س-٤ = ٤$

$\Leftarrow ٤س+١ = ٤ \Leftarrow ٤س = ٤-١$

$\Leftarrow ٤س = ٣ \therefore$ $\boxed{س = \frac{٣}{٤}}$

تمارين ومسائل

١ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

أ $(٨)^{٥س-٣} = (٤)^{٣س-٦}$

الحل :

$(٢^{٣})^{٥س-٣} = (٢^{٢})^{٣س-٦}$

$\Leftarrow (٢)^{١٥س-٩} = (٢)^{٦س-١٢}$

$\Leftarrow ١٥س-٩ = ٦س-١٢$

$\Leftarrow ١٥س+٦س = ١٢+٩$

$\Leftarrow ٢١س = ٢١$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = ١}$

ب $(٧)^{س-٢} = (٤٩)^{٤س-٥}$

الحل :

$(٧)^{س-٢} = (٧^{٢})^{٤س-٥}$

$\Leftarrow (٧)^{س-٢} = (٧)^{٨س-١٠}$

$\Leftarrow س-٢ = ٨س-١٠$

$\Leftarrow س+٨س = ١٠+٢$

$\Leftarrow ٩س = ١٢$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = \frac{١٢}{٩}}$

حـ $(٢٧)^{س-٢} = (٨١)^{٢-س}$

الحل :

$(٣^{٣})^{س-٢} = (٣^{٤})^{٢-س}$

$\Leftarrow (٣)^{٣س-٦} = (٣)^{٨-٤س}$

$\Leftarrow ٣س - ٦ = ٨ - ٤س$

$\Leftarrow ٣س + ٤س = ٨ + ٦ \Leftarrow ٧س = ١٤$

$\Leftarrow$ **س = ٢**

❷ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

أ $\left(\frac{١}{٩}\right)^{٣س-٥} = ٢٧$

الحل :

$\left(\frac{١}{٣^{-٢}}\right)^{٣س-٥} = ٣^{٣} \Leftarrow ٣^{-٢(٣س-٥)} = ٣^{٣}$

$\Leftarrow -٦س + ١٠ = ٣ \Leftarrow -٦س = ٣ - ١٠$

$\Leftarrow -٦س = -٧ \Leftarrow$ **س = $\frac{٧}{٦}$**

ب $(١٢٥)^{٢-س} = (٥)^{٢س-٩}$

الحل :

$(٥^{٣})^{٢-س} = (٥)^{٢س-٩}$

$\Leftarrow (٥)^{٦-٣س} = (٥)^{٢س-٩}$

$\Leftarrow ٦ - ٣س = ٢س - ٩$

$\Leftarrow ٦ + ٩ = ٢س + ٣س \Leftarrow ١٥ = ٥س$

$\Leftarrow$ **س = ٣**

حـ $(٦)^{٢س-١} = ٢١٦$

الحل :

$(٦)^{٢س-١} = ٦^{٣}$

$\Leftarrow ٢س - ١ = ٣$

$\Leftarrow ٢س = ٤$

$\Leftarrow$ **س = ٢**

٢ المعادلات اللوغاريتمية

تعريف هام

لـو$_{ب}$ أ = حـ ، أ > ٠ ، ب > ٠ ، ب ≠ ١

قبل البدء يجب علينا التعرف على قوانين اللوغاريتمات

① لـو$_{ب}$ (أ × ب) = لـو$_{ب}$ أ + لـو$_{ب}$ ب

② لـو$_{ب}$ $\frac{أ}{ب}$ = لـو$_{ب}$ أ - لـو$_{ب}$ ب

③ لـو$_{ب}$ أ^{ن} = ن لـو$_{ب}$ أ

ملاحظة : لـو$_{ب}$ ١ = صفر ،

لـو$_{ب}$ أ = ١

مثال : حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :

① لـو$_{٢}$ س = ٣

الحل :

لـو$_{٢}$ س = ٣ ⇔ ٢^{٣} = س

⇐ س = ٨

② لـو$_{\frac{١}{٨}}$ ٢ = س

الحل :

لـو$_{\frac{١}{٨}}$ ٢ = س ⇔ $\frac{١}{٨}$ = ٢^{س}

⇐ ٢^{س} = ٢$^{-٣}$

⇐ س = -٣

③ لـو$_{٣}$ (س - ٢) = ١

الحل :

لـو$_{٣}$ (س - ٢) = ١ ⇔ س - ٢ = ٣^{١}

⇐ س - ٢ = ٣ ⇐ س = ٥

④ لـو$_{س}$ ٠,٠٠١ = -٣

الحل :

لـو$_{س}$ ٠,٠٠١ = -٣ ⇔ س$^{-٣}$ = ٠,٠٠١

⇐ س$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٠٠٠}$

⇐ س$^{-٣}$ = ١٠$^{-٣}$ ⇐ س = ١٠

⑤ لـو$_{\frac{١}{٢٧}}$ (٥ - ٢س) = -١

الحل :

(٥ - ٢س) = ($\frac{١}{٢٧}$)$^{-١}$

⇐ ٥ - ٢س = ٢٧

⇐ -٢س = ٢٢ ⇐ س = -١١

⑥ لـو$_{٤٩}$ (٢س + ٧) = $\frac{١}{٢}$

الحل :

٢س + ٧ = (٤٩)$^{\frac{١}{٢}}$

⇐ ٢س + ٧ = ٧

⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠

⑦ $\log_{2}(س^{2}-2س+5)=3$

الحل :

$س^{2}-2س+5=2^{3}$

$\Leftarrow س^{2}-2س-3=0$

$\Leftarrow (س-3)(س+1)=0$

$\Leftarrow$ س = 3 ، س = −1

⑧ $\log_{4}64=3-2س$

الحل :

$4^{3-2س}=64 \Leftarrow 4^{3-2س}=4^{3}$

$\Leftarrow 3-2س=3$

$\Leftarrow$ س = 0

⑨ $\log_{3}(س^{2}+8س)=2$

الحل :

$3^{2}=س^{2}+8س$

$\Leftarrow س^{2}+8س-9=0$

$\Leftarrow (س+9)(س-1)=0$

$\Leftarrow$ س = −9 ، س = 1

⑩ $\log_{9}\frac{1}{27}=-ص$

الحل :

$\Leftarrow 9^{-ص}=\frac{1}{27}$

$\Leftarrow 3^{-2ص}=3^{-3}$

$\Leftarrow -2ص=-3$

$\Leftarrow$ ص = $\frac{3}{2}$

⑪ $\log_{9}1=ص^{3}-1$

الحل :

$\Leftarrow 9^{ص^{3}-1}=1$

$\Leftarrow 9^{ص^{3}-1}=9^{0}$

$\Leftarrow ص^{3}-1=0$

$\Leftarrow ص^{3}=1 \Leftarrow$ ص = 1

⑫ $\log_{س}6س-9=2$

الحل :

$\Leftarrow س^{2}=6س-9$

$\Leftarrow س^{2}-6س+9=0$

$\Leftarrow (س-3)(س-3)=0$

$\Leftarrow$ س = 3

⑬ $\log_{72}(س+7)+\log_{72}(س-7)=1$

الحل :

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

$\Leftarrow \log_{72}(س+7)(س-7)=1$

$\Leftarrow \log_{72}(س^{2}-49)=1$

$\Leftarrow س^{2}-49=72$

$\Leftarrow س^{2}=121 \Leftarrow$ س = 11

١٤ $لـو_{٢}(س+٢) - لـو_{٢}(س-١) = ٢$

الحل :

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

$\Leftarrow لـو_{٢}\frac{(س+٢)}{س-١} = ٢$

$\Leftarrow ٢^{٢} = \frac{(س+٢)}{س-١} \Leftarrow ٤ = \frac{(س+٢)}{س-١}$

$\Leftarrow ٤س - ٤ = س + ٢$

$\Leftarrow ٣س = ٦ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

١٥ $لـو_{٤}(س^{٢} - ٢س + ١) = ٢$

الحل :

$\Leftarrow س^{٢} - ٢س + ١ = ٤^{٢}$

$\Leftarrow س^{٢} - ٢س + ١ = ١٦$

$\Leftarrow س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

$\Leftarrow (س+٣)(س-٥) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = -٣}$ ، $\boxed{س = ٥}$

١٦ $لـو_{٢}(س^{٢} + س - ٤) = ٤$

الحل :

$\Leftarrow س^{٢} + س - ٤ = ٢^{٤} \Leftarrow س^{٢} + س - ٤ = ١٦$

$\Leftarrow س^{٢} + س - ٢٠ = ٠ \Leftarrow (س+٥)(س-٤) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = -٥}$ ، $\boxed{س = ٤}$

١٧ $لـو_{٣}(س^{٢} + ٥) = ٢$

الحل :

$\Leftarrow س^{٢} + ٥ = ٣^{٢}$

$\Leftarrow س^{٢} + ٥ = ٩$

$\Leftarrow س^{٢} = ٩ - ٥$

$\Leftarrow س^{٢} = ٤$

$\Leftarrow \boxed{س = \pm ٢}$

١٨ $لـو_{٣}(س-٢) + لـو_{٣}س = ١$

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

الحل :

$\Leftarrow لـو_{٣}(س-٢) \times س = ١$

$\Leftarrow س(س-٢) = ٣^{١}$

$\Leftarrow س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س-٣)(س+١) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = ٣}$ ، $\boxed{س = -١}$

ملاحظة القيمة السالبة تهمل دائمًا

⑲ $لـو_{٢}(٢س+٥) - لـو_{٢}(س-١) = ٤$

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

الحل :

$\Leftarrow لـو_{٢}\frac{(٢س+٥)}{س-١} = ٤$

$\Leftarrow \frac{(٢س+٥)}{س-١} = ٢^{٤}$

$\Leftarrow \frac{(٢س+٥)}{س-١} = ١٦$

$\Leftarrow ١٦س - ١٦ = ٢س + ٥$

$\Leftarrow ١٤س = ٢١$

$\Leftarrow \boxed{س = \frac{٢١}{١٤} = \frac{٣}{٢}}$

⑳ $لـو_{٧}(س+٥) + لـو_{٧}(س-٣) = لـو_{٧}٢٠$

الحل :

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

$\Leftarrow لـو_{٧}(س+٥)(س-٣) = لـو_{٧}٢٠$

$\Leftarrow س^{٢} + ٢س - ٣٥ = ٠$

$\Leftarrow (س+٧)(س-٥) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = -٧} \text{ ، } \boxed{س = ٥}$

㉑ $لـو_{٤}٦٤ = ٣ - ٢س$

الحل :

$\Leftarrow ٤^{٣-٢س} = ٤^{٣}$

$\Leftarrow ٣ - ٢س = ٣$

$\Leftarrow -٢س = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٠}$

أوجد قيمة

㉒ $لـو_{٧}\sqrt{٧}$

الحل :

نفرض أن $لـو_{٧}\sqrt{٧} = س$

$\Leftarrow \sqrt{٧} = ٧^{س}$

$\Leftarrow ٧^{\frac{١}{٢}} = ٧^{س}$

$\Leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

أسئلة الدرس

١ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

أ لـو$_{٢}$ (٥س − ٤) = ٤

الحل :

$\Leftarrow ٢^{٤} = ٥س - ٤ \quad \Leftarrow ١٦ = ٥س - ٤$

$\Leftarrow ٥س = ٢٠$

$\Leftarrow$ **س = ٤**

ب لـو$_{٣}$ ٢٤٣ = ٢س − ١

الحل :

$\Leftarrow ٧^{٢س-١} = ٧^{٣}$

$\Leftarrow ٢س - ١ = ٣$

$\Leftarrow ٢س = ٤ \quad \Leftarrow$ **س = ٢**

جـ لـو$_{٣}$ ٦ − س = ٣

الحل :

$\Leftarrow ٣^{٣} = ٦ - س \quad \Leftarrow ٢٧ = ٦ - س$

$\Leftarrow س = -٢١$

$\Leftarrow$ **س = −٢١**

د لـو$_{٥}$ (س^{٢} + ٣س − ٣) = ٠

الحل :

$\Leftarrow س^{٢} + ٣س - ٣ = ٠.٥$

$\Leftarrow س^{٢} + ٣س - ٣ = ١$

$\Leftarrow س^{٢} + ٣س - ٤ = ٠$

$\Leftarrow (س - ١)(س + ٤) = ٠$

$\Leftarrow$ **س = ١** ، **س = −٤** هنا السالب مقبول لأنه يحقق المعادلة اللوغاريتمية

هـ لـو$_{١٠}$ ١٠^{٦} = ٢س + ٤

الحل :

$\Leftarrow ١٠^{٦} = ١٠^{٢س+٤}$

$\Leftarrow ٢س + ٤ = ٦$

$\Leftarrow ٢س = ٢$

$\Leftarrow$ **س = ١**

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية

لـو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣) = ٠

الحل :

$\Leftarrow س^{٢} - ٣ = ٣^{٠}$

$\Leftarrow س^{٢} - ٣ = ١$

$\Leftarrow س^{٢} = ٤$

$\Leftarrow$ **س = ± ٢**

❸ أوجد مجموعة حل المعادلة اللوغاريتمية

$\text{لـو}_{٣}(س-١) - \text{لـو}_{٣}(٢س-٥) = ١$

نستخدم قوانين اللوغاريتمات

الحل :

$\Leftarrow \text{لـو}_{٣}\frac{(س-١)}{٢س-٥} = ١$

$\Leftarrow \frac{(س-١)}{٢س-٥} = ٣^{١}$

$\Leftarrow ٦س - ١٥ = س - ١$

$\Leftarrow ٥س = ١٤$

$\Leftarrow \boxed{س = \frac{١٤}{٥}}$

٣ المتسلسلات

المتسلسلة :

هي مجموع حدود المتتالية $ع_ر$

المقابلة لها يرمز لها بالرمز $\left[\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر\right]$

$ج_ن$ = مجموع حدود المتسلسلة

مثال :

$\sum_{ر=١}^{٤} ٢ + ٣ + ٥ + ١ = ١١$

$ج_٤$ عدد حدودها (٤)

مثال : أكتب المتسلسلة المقابلة للمتتالية

$ف_ن = \{٣ ، -١ ، ٤ ، ٩ ، ٥\}$ ثم جد مجموعها

الحل :

$\sum_{ر=١}^{٥} ف_ر = ٣ + (-١) + ٤ + ٩ + ٥$

$ج_٥$ عدد حدودها (٥)

$ج_٥ = ٢٠$

أسئلة

١ إذا كان : $ع_ن = ن^٢ + ١$

أكتب المتسلسلة المقابلة لها ثم جد مجموع أول ٤ حدود منها ($ج_٤$)

الحل :

$\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر = \sum_{ر=١}^{ن} (ر^٢ + ١)$

$\Leftarrow \sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢ + ١) = ٢ + ٥ + ١٠ + ١٧ = ٣٤$

توضيح $ع_١ = ١^٢ + ١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٢^٢ + ١ = ٥$

$ج_٤ = ٣٤$

٢ إذا كان : $ع_ن = ٣ ن^٢ + ٣$

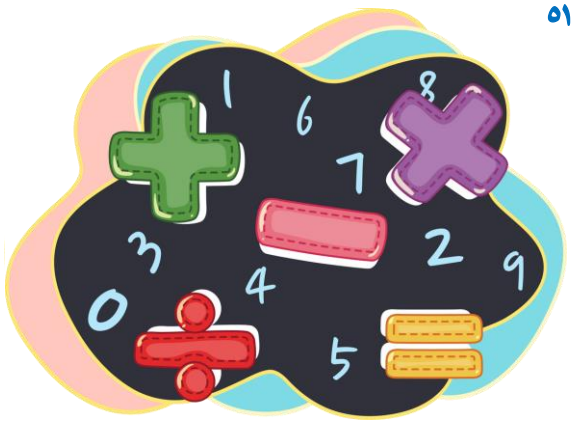
أكتب المتسلسلة المقابلة لها ثم جد مجموع أول ٣ حدود منها ($ج_٣$)

الحل :

$\sum_{ر=١}^{ن} ع_ر = \sum_{ر=١}^{ن} (٣ر^٢ + ٣)$

$\Leftarrow \sum_{ر=١}^{٣} (٣ر^٢ + ٣) = ٦ + ١٥ + ٣٠ = ٣٤$

$ج_٣ = ٥١$



٣ أوجد مجموع أول (٣) حدود في المتسلسلة

$$\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ر - ٧)$$

الحل :

$ع_١ = ٢(١) - ٧ = -٥$

$ع_٢ = ٢(٢) - ٧ = -٣$

$ع_٣ = ٢(٣) - ٧ = -١$

$ج_٣ = -٥ - ٣ - ١ = -٩$

٤ أوجد مجموع أول (٣) حدود في المتسلسلة

$$\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{ر}{٢ر + ١}\right)$$

الحل :

$ع_١ = \frac{١}{١+٢} = \frac{١}{٣}$ ، $ع_٢ = \frac{٢}{١+(٢)٢} = \frac{٢}{٥}$

$ع_٣ = \frac{٣}{١+(٣)٢} = \frac{٣}{٧}$

$ج_٣ = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٧} = \frac{١٢٢}{١٠٥}$

٥ جد قيمة كل مما يلي :

① $\sum_{ن=١}^{٣} (ن + ن^{٢})$

الحل :

$ع_١ = ١ + ١^{٢} = ٢$

$ع_٢ = ٢ + ٢^{٢} = ٦$

$ع_٣ = ٣ + ٣^{٢} = ١٢$

$ج_٣ = ٢ + ٦ + ١٢ = ٢٠$

② $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} - ٢ر)$

الحل :

$ع_١ = ١^{٢} - ٢ \times ١ = -١$

$ع_٢ = ٢^{٢} - ٢ \times ٢ =$ صفر

$ع_٣ = ٣^{٢} - ٢ \times ٣ = ٣$

$ع_٤ = ٤^{٢} - ٢ \times ٤ = ٨$

$ج_٤ = (-١) +$ صفر $+ ٣ + ٨ = ١٠$

③ $\sum_{ن=١}^{٥} (١ + ن^{٣})$

الحل :

$ع_١ = ١ + ١^{٣} = ٢$

$ع_٢ = ١ + ٢^{٣} = ٩$

$ع_٣ = ١ + ٣^{٣} = ٢٨$

$ع_٤ = ١ + ٤^{٣} = ٦٥$

$ع_٥ = ١ + ٥^{٣} = ١٢٦$

$ج_٥ = ٢ + ٩ + ٢٨ + ٦٥ + ١٢٦ = ٢٣٠$

واجب على الطاير

١ $\sum_{ن=١}^{٤} (ن^{٢} - ٢ن)$

٢ $\sum_{ن=١}^{٣} \left(\frac{ن^{٢} - ن}{٢ن}\right)$

٣ $\sum_{ن=١}^{ك} (٢ن + ن^{٢})$

٦ إذا كان : $\sum_{ن=١}^{ك} (ن^{٣} - ٢ن) = ٤٩س^{٢} - ١$

جد قيمة س

الحل :

$ع_{١} = ١^{٣} - ٢ \times ١ = -١$

$ع_{٢} = ٢^{٣} - ٢ \times ٢ = ٤$

$ع_{٣} = ٣^{٣} - ٢ \times ٣ = ٢١$

$ع_{٤} = ٤^{٣} - ٢ \times ٤ = ٥٦$

$ع_{٥} = ٥^{٣} - ٢ \times ٥ = ١١٥$

$ج_{٥} = (-١) + ٤ + ٢١ + ٥٦ + ١١٥ = ١٩٥$

$١٩٥ = ٤٩س^{٢} - ١ \Leftarrow ١٩٥ + ١ = ٤٩س^{٢}$

$\Leftarrow ٤٩س^{٢} = ١٩٦ \Leftarrow$ س = ± ٢

٧ جد الحد الرابع للمتسلسلة :

$\sum_{ن=١}^{\infty} (٢ن^{٢} - ٢)$

الحل :

$ع_{٤} = ٢ \times ٤^{٢} - ٢ = ٣٢ - ٢ = ٣٠$

٨ إذا كان مجموع أول ثلاث حدود من المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢ب}{ن}$ يساوي ٢٢ أوجد قيمة ب

الحل :

$\frac{٢ب}{١} + \frac{٢ب}{٢} + \frac{٢ب}{٣} = ٢٢$

$\Leftarrow ٣ب + \frac{٢ب}{٣} = ٢٢$

$\Leftarrow \frac{١١ب}{٣} = ٢٢$

$\Leftarrow ١١ب = ٦٦$

$\Leftarrow$ ب = ٦

واجب

إذا كان مجموع أول (٥)حدود من المتسلسلة

$\sum_{ن=١}^{\infty} (-٢)^{ن} + ك$ يساوي ٣ جد قيمة ك

أسئلة الدرس

١ أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلات الآتية :

أ $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{٢}}{ن+٢}$

الحل :

$ح_{١} = \frac{١}{٢+١} = \frac{١}{٣}$

$ح_{٢} = \frac{٤}{٢+٢} = ١$

$ح_{٣} = \frac{٩}{٥}$

$ح_{٤} = \frac{١٦}{٦}$

ب $\sum_{ن=١}^{\infty} ن^{٢}$

الحل :

$ح_{١} = ١^{٢} = ١$

$ح_{٢} = ٢^{٢} = ٤$

$ح_{٣} = ٣^{٢} = ٩$

$ح_{٤} = ٤^{٢} = ١٦$

٢ أي المتسلسلات الآتية منتهية وأيها غير منتهية

أ $٢ + ٨ + ١٨ + ٣٢ + ...$ (غير منتهية)

ب $١ + ٨ + ٢٧ + ٦٤ + ١٢٥$ (منتهية)

ج $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١+ن٢}{٢+ن}\right)$ (غير منتهية)

٣ أوجد مجموع ($ح_{ن}$) لكل من المتسلسلات الآتية

أ $\sum_{ن=١}^{٦} (٢ن^{٢} + ٣ن - ٤)$

الحل :

$ح_{١} = ٢ \times ١^{٢} + ٣ \times ١ - ٤ = ١$

$ح_{٢} = ٢ \times ٢^{٢} + ٣ \times ٢ - ٤ = ١٠$

$ح_{٣} = ٢ \times ٣^{٢} + ٣ \times ٣ - ٤ = ٢٣$

$ح_{٤} = ٢ \times ٤^{٢} + ٣ \times ٤ - ٤ = ٤٠$

$ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٦}$ واجب

ب $\sum_{ن=١}^{٤} ٨$

$ح_{١} = ٨$ ، $ح_{٢} = ٨$ ، $ح_{٣} = ٨$ ، $ح_{٤} = ٨$

$ح_{٤} = ٨ + ٨ + ٨ + ٨ = ٣٢$ أو $ح_{٤} = ٨ \times ٤ = ٣٢$

ج $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١+ن٢}{٢+ن}$

الحل :

$ح_{١} = \frac{١+٢}{٢+١} = ١$

$ح_{٢} = \frac{١+٢ \times ٢}{٢+٢} = \frac{٥}{٤}$

$ح_{٣} = \frac{١+٣ \times ٢}{٢+٣} = \frac{٧}{٥}$

$ح_{٤} = \frac{١+٤ \times ٢}{٢+٤} = \frac{٩}{٦}$

$ح_{٥} = \frac{١+٥ \times ٢}{٢+٥} = \frac{١١}{٧}$

$ح_{٥} = \frac{٢٨٢٣}{٤٢٠}$

٤ إذا كان مجموع أول أربع حدود من المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢ن + ا}{ن + ٢}$ يساوي $\frac{٩٧}{٥}$ أوجد قيمة ا

الحل :

$ع_١ = \frac{ا + ٢}{٣}$

$ع_٢ = \frac{ا + ٤}{٤}$

$ع_٣ = \frac{ا + ٦}{٥}$

$ع_٤ = \frac{ا + ٨}{٦}$

$ح_٤ = \frac{٩٧}{٥}$

$\Leftarrow \frac{ا + ٢}{٣} + \frac{ا + ٤}{٤} + \frac{ا + ٦}{٥} + \frac{ا + ٨}{٦} = \frac{٩٧}{٥}$

$\Leftarrow ٥٧ا + ٢٥٢ = ١١٦٤$

$\Leftarrow ٥٧ا = ٩١٢$

$\Leftarrow \boxed{ا = \frac{٩١٢}{٥٧}}$

٤ المتسلسلة الحسابية ومجموعها

قبل أن نبدأ وجب علينا تذكر المتتالية الحسابية وهي التي يكون فيها الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقدارًا ثابتًا دائمًا ويرمز لها بالرمز

$ح_ن = أ + (ن-١) ء$

أ : الحد الأول

ء : الأساس

ن : رتبة الحد

ويكون مجموع المتسلسلة الحسابية بأنها مجموع المتتالية الحسابية المرتبطة بها

أمثلة

حدد المتسلسلة الحسابية من غيرها فيما يلي

(١) $٧ + ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩$

(٢) $٨ + ٦ + ٥ + ٣ + ٢$

الحل :

(١) $٧ + ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩$ متسلسلة حسابية لأن

$١٠ - ٧ = ٣$

$١٣ - ١٠ = ٣$

$١٩ - ١٦ = ٣$

(٢) $٨ + ٦ + ٥ + ٣ + ٢$ ليست حسابية لأن

$٦ - ٨ = -٢$

$٥ - ٦ = -١$

$-٢ \neq -١$

تعريف : إذا أردنا إيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول (أ) معلوم وأساسها (ء) نطبق على القانون الآتي :

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن-١) ء]$

أمثلة

❶ جد مجموع أول (٢٠) حد من المتسلسلة الحسابية $(٣ + ٧ + ١١ + ١٥ + ...)$

الحل :

الحد الأول أ = ٣

الأساس ء = ٧ − ٣ = ٤ ، ن = ٢٠

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن-١) ء]$

$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ٣ + (٢٠-١) \times ٤]$

$= ١٠ (٦ + ٧٦)$

$= ١٠ \times ٨٢ = ٨٢٠$

❷ جد مجموع أول (٤٠) حد من المتسلسلة الحسابية $(١٢ + ١٠ + ٨ + ٦ + ...)$

الحل :

الحد الأول أ = ١٢

الأساس ء = ١٠ − ١٢ = −٢ ، ن = ٤٠

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن-١) ء]$

$ح_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢} [٢ \times ٢ + ١٢ + (-٤٠-١) \times (-٢)]$

$= ٢٠ ((-٢) \times ٣٩ + ٢٤)$

$= ٢٠ (٢٤ - ٧٨) = -١٠٨٠$

٣ جد مجموع المتسلسلة

$(٤ + ٨ + ١٢ + ١٦ + ٢٠ + ٢٤)$

الحل :

هل المتسلسلة حسابية ؟ نعم لأن الفرق ثابت

الحد الأول أ = ٤

الأساس ء = ٨ - ٤ = ٤ ، ن = ٦

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

$ح_٦ = \frac{٦}{٢} [٢ \times ٢ + ٤ + (٦-١) \times (٤)]$

$= ٣ (٨ + ٥ \times (٤)) = ٣ (٢٨) = ٨٤$

قانون مختصر

إذا علمت بالسؤال (أ) ، (ل) حيث (ل) الحد الأخير في المتسلسلة فإن تطبق القانون الآتي

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

٤ جد مجموع المتسلسلة

$(٦ + ١٠ + ١٤ + ١٨ + ٢٢ + ٢٦)$

الحل :

هل المتسلسلة حسابية ؟ نعم لأن الفرق ثابت

الحد الأول أ = ٦

الأساس ء = ١٠ - ٦ = ٤ ، ن = ٦ ، ل = ٢٦

هنا نجد الحد الأخير موجود نستخدم القانون

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_٦ = \frac{٦}{٢} [٦ + ٢٦]$

$= ٣ (٣٢) = ٩٦$

واجب

جد مجموع المتسلسلة (٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧)

وحدد ما إذا كانت حسابية

٥ جد $\sum_{ن=١}^{٨٠} (١٠ - ن)$

في هذا النوع من الأسئلة نجد المتتالية الحسابية أولًا ثم نجد مجموعها

الحل :

$ح_١ = ١٠ - ١ = ٩$ ، $ح_٢ = ١٠ - ٢ = ٨$

الحد الأخير = ١٠ - ٨٠ = -٧٠

الآن نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_٦ = \frac{٨٠}{٢} [٩ + (-٧٠)]$

$= ٤٠ \times -٦١ = -٢٤٤٠$

تذكر

ن = ٨٠

أ = ٩

ل = -٧٠

٦ جد $\sum_{ن=١}^{٦٠} (١٢ - ن)$

الحل :

$ع_١ = ١٢ - ١ = ١١$ ، $ع_٢ = ١٢ - ٢ = ١٠$

الحد الأخير $= ١٢ - ٦٠ = -٤٨$

الآن نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_٦ = \frac{٦٠}{٢} [٩ + (-٤٨)]$

$= ٣٠ \times -٣٧ = -١١١٠$

تذكر

$ن = ٦٠$

$أ = ١١$

$ل = -٤٨$

٧ جد $\sum_{ن=١}^{٤٠} (٣ ن)$

الحل :

$ع_١ = ٣ \times ١ = ٣$ ، $ع_٢ = ٣ \times ٢ = ٦$

الحد الأخير $= ٣ \times ٤٠ = ١٢٠$

الآن نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_٦ = \frac{٤٠}{٢} [٣ + ١٢٠]$

$= ٢٠ \times ١٢٣ = ٢٤٦٠$

تذكر

$ن = ٤٠$

$أ = ٣$

$ل = ١٢٠$

٨ جد مجموع المتسلسلة

$(١ + ... + ٣٧ + ٣٩ + ٤١)$

الحل :

هنا ن ليست معلومة نستخرجها عن طريق الحد العام

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$

$أ = ٤١$ ، $ء = ٣٩ - ٤١ = -٢$

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$

$١ = ٤١ + (ن - ١) \times (-٢)$

$١ = ٤١ - ٢ ن + ٢$

$١ = ٤٣ - ٢ ن$

$٢ ن = ٤٢ \Leftarrow ن = ٢١$

الآن نكمل الحل

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_{٢١} = \frac{٢١}{٢} [٤١ + ١]$

$= ٢١ \times ٢١ = ٤٤١$

٩ جد مجموع أول (٤٠) حدًا من المتتالية التي حدها العام $ع_ن = ٤ ن - ٥$

الحل :

الحد الأول $ع_١ = أ = ٤ \times ١ - ٥ = -١$

الحد الأول $ع_٢ = ٤ \times ٢ - ٥ = ٣$

الأساس $ء = ع_٢ - ع_١ = ٣ - (-١) = ٤$

، $ن = ٤٠$

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

$ح_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢} [٢ \times (-١) + (٤٠ - ١) \times ٤]$

$= ٢٠ (-٢ + ٣٩ \times ٤)$

$= ٢٠ \times ١٥٤ = ٣٠٨٠$

١٠ أجد الحد الخامس عشر من المتسلسلة الحسابية التي يعطى بالعلاقة : $ح_ن = ٤ن - ن^٢$

الحل :

$ع_١ = ٤ \times ١ - ١^٢ = ٣$ ومنه $أ = ٣$

$ح_٢ = ع_١ + ع_٢ = ٤ \times ٢ - ٢^٢ = ٤$ ومنه

$ع_٢ = ح_٢ - ح_١ = ٤ - ٣ = ١$

الأساس $ء = ع_٢ - ع_١ = ١ - ٣ = -٢$ ومنه

$ع_ن = أ + (ن - ١) ء$

$ع_{١٥} = ٣ + (١٥ - ١)(-٢) = -٢٥$

١١ إذا كان مجموع أول (ن) من حدود متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $ح_ن = \frac{ن}{٢} (٢١ - ٥ن)$

أوجد الحد العاشر

الحل :

$ع_{١٠} = ح_{١٠} - ح_٩ = \frac{١٠}{٢}(٢١ - ٥ \times ١٠) - \frac{٩}{٢}(٢١ - ٥ \times ٩)$

$ع_{١٠} = -١٤٥ + ١٠٨ = -٣٧$

١٢ جد $\sum_{ن=١}^{٤٠} (٢ن + ١)$

الحل :

$ع_١ = ٢ \times ١ + ١ = ٣$ ، $ع_٢ = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

$ع_٣ = ٢ \times ٣ + ١ = ٧$ ، $ع_٤ = ٢ \times ٤٠ + ١ = ٨١$

الآن نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢} [٣ + ٨١]$

$= ٢٠ \times ٨٤ = ١٦٨٠$

تذكر

ن = ٤٠

أ = ٣

ل = ٨١

أسئلة الدرس

١ أكتب الحدود الأربعة الأولى من مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

أ) $\sum_{ن=١}^{٧} (٣ن + ١)$

الحل :

$ع_١ = ٣ \times ١ + ١ = ٤$ ، $ع_٢ = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$

$ع_٣ = ٣ \times ٣ + ١ = ١٠$ ، $ع_٤ = ٣ \times ٤ + ١ = ١٣$

$\Leftarrow ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣$

أ) $\sum_{ن=١}^{١٧} ٢^ن$

الحل :

$ع_١ = ٢^١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٢^٢ = ٤$

$ع_٣ = ٢^٣ = ٨$ ، $ع_٤ = ٢^٤ = ١٦$

$\Leftarrow ٢ + ٤ + ٨ + ١٦$

٢ متسلسلة حسابية حدها الأول (١٤) وأساسها (٥) أوجد مجموع أول (٢٠) حدًا الأولى منها

الحل :

المطلوب : $ح_{٢٠}$

نطبق على القانون

$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ء]$

$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١٤ + (٢٠ - ١) \times ٥]$

$= ١٠ (٢٨ + ١٩ \times ٥)$

$= ١٠ \times ١٢٣ = ١٢٣٠$

تذكر

ن = ٢٠

أ = ١٤

ء = ٥

٣ أجد الحد الأول في المتسلسلة الحسابية التي أساسها (٢) ومجموع أول (٦٠) حدًا فيها =(١٢٠)

الحل :

تذكر
$ح_{٦٠} = ١٢٠$
$أ = ؟$
$ء = ٢$

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ء]$

$١٢٠ = \frac{٦٠}{٢} [٢أ + (٦٠ - ١) \times ٢]$

$١٢٠ = ٣٠ [٢أ + ٥٩ \times ٢]$

$١٢٠ = ٣٠ [٢أ + ١١٨]$ بالقسمة على ٣٠

$٤ = ٢أ + ١١٨ \Leftarrow ٢أ = ٤ - ١١٨ \Leftarrow أ = -٥٧$

٤ كم حدًا يجب أخذه من المتسلسلة الحسابية التي حدها الأول (٣) وأساسها (٦) ليكون مجموع تلك الحدود (٢٧) ؟

الحل :

تذكر
$ح_{ن} = ٢٧$
$أ = ٣$
$ء = ٦$
$ن = ؟$

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ء]$

$٢٧ = \frac{ن}{٢} [٢ \times ٣ + (ن - ١) \times ٦]$

$٢٧ = \frac{ن}{٢} [٦ + ٦ن - ٦]$

$٢٧ = \frac{ن}{٢} [٦ن]$ $\Leftarrow ٣ = ن^{٢}$ $\Leftarrow ن = ٣$

٥ متتالية حسابية حدها الأول (٣) وحدها الستون = ٨٧ جد $ح_{٦٠}$

الحل :

تذكر
$ح_{٦٠} = ؟$
$أ = ٣$
$ل = ح_{٦٠} = ٨٧$

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$

$ح_{٦٠} = \frac{٦٠}{٢} [٣ + ٨٧]$

$= ٣٠ \times ٩٠ = ٢٧٠٠$

٥ المتسلسلة الهندسية ومجموعها

تعريف

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي تكون النسبة بين أي حدين متتاليين فيها متساوية دائمًا

الحد العام : $ح_ن = ا \, ر^{ن-١}$

حيث ا الحد الأول ، ر الأساس ،

ن رتبة الحد النوني

مثال : ميز المتسلسلات الهندسية مما يأتي :

(أ) ٨١ + ٢٧ + ٩ + ٣ + ١

الحل :

متسلسلة هندسية لأن

$\Leftarrow \frac{٢٧}{٨١} = \frac{١}{٣}$

$\Leftarrow \frac{٩}{٢٧} = \frac{١}{٣}$

(ب) ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨

الحل :

ليست متسلسلة هندسية لأن

$\Leftarrow \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ $\Leftarrow \frac{٩}{٦} \neq \frac{١٢}{٩}$

قانون : إذا أردنا إيجاد مجموع أول (ن) حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول (ا) معلوم وأساسها (ر) نطبق على القانون الآتي :

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$ حيث $ر \neq ١$

أمثلة

١ أوجد مجموع المتسلسلة

٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ٢٤٣

الحل :

المتسلسلة هندسية لأن

$\frac{٨١}{٢٧} = \frac{٢٧}{٩} = \frac{٩}{٣}$

تذكر

ن = ٥

ا = ٣

ر = ٣

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_٥ = ٣ \left(\frac{٣^{٥} - ١}{٣ - ١} \right)$

$ح_٥ = ٣ \left(\frac{٢٤٣ - ١}{٢ - ١} \right) = ٣ \left(\frac{٢٤٢ -}{٢ -} \right) = ٣٦٣$

٢ جد مجموع أول (٦) حدود من المتسلسلة الهندسية ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ...

الحل :

تذكر

ن = ٦

ا = ١

ر = ٢

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_٦ = ١ \left(\frac{٢^{٦} - ١}{٢ - ١} \right)$

$ح_٥ = \left(\frac{٦٤ - ١}{١ -} \right) = \left(\frac{٦٣ -}{١ -} \right) = ٦٣$

٣ متسلسلة هندسية حدها الأول (٦)

وأساسها (-٢) جد مجموع (٦) حدود الأولى منها

الحل :

تذكر

ن = ٦

ا = ٦

ر = -٢

$ح_ن = ا\left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١}\right)$

$ح_٦ = ٦\left(\frac{(-٢)^٦ - ١}{(-٢) - ١}\right)$

$ح_٥ = ٦\left(\frac{-٦٤ - ١}{٣}\right) = ٦\left(\frac{-٦٣}{٣}\right) = -١٢٦$

واجب

أوجد مجموع أول (٥) حدود من المتسلسلة الهندسية

١ + ٤ + ١٦ + ٦٤ + ...

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

٤ جد $\sum_{ن=١}^{٨} ٢^ن$

الحل

$ع_١ = ٢^١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٢^٢ = ٤$

$ع_٣ = ٢^٣ = ٨$ ، $ع_٤ = ٢^٤ = ١٦$

$ح_ن = ا\left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١}\right)$

تذكر

ن = ٨

ا = ٢

ر = ٢

$ح_٨ = ٢\left(\frac{٢^٨ - ١}{٢ - ١}\right)$

$ح_٨ = ٢\left(\frac{٢٥٦ - ١}{١ -}\right)$

$= ٢\left(\frac{-٢٥٥}{-١}\right) = ٥١٠$

٥ جد $\sum_{ن=١}^{٦} ٢^{ن+١}$

الحل

$ع_١ = ٢^{١+١} = ٤$ ، $ع_٢ = ٢^{١+٢} = ٨$

$ع_٣ = ٢^{١+٣} = ١٦$ ، $ع_٤ = ٢^{١+٤} = ٣٢$

$ح_ن = ا\left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١}\right)$

تذكر

ن = ٦

ا = ٤

ر = ٢

$ح_٦ = ٤\left(\frac{٢^٦ - ١}{٢ - ١}\right)$

$ح_٦ = ٤\left(\frac{٦٤ - ١}{١ -}\right)$

$= ٤\left(\frac{-٦٣}{-١}\right) = ٢٥٢$

٦ أوجد الحد الثامن للمتسلسلة الهندسية التي مجموع أول (٣) حدود منها = ٢٨ ، وأساسها = ٢

الحل :

تذكر

ن = ٣

ا = ؟

ر = ٢

$ح_٣$ = ٢٨

$ح_ن = ا\left(\frac{ر^ن - ١}{ر - ١}\right)$

$ح_٣ = ا\left(\frac{(٢)^٣ - ١}{(٢) - ١}\right)$

$٢٨ = ا\left(\frac{٨ - ١}{١ -}\right)$

$٢٨ = ا \left(\frac{-٧}{-١}\right)$

$٢٨ = ٧ ا \Leftarrow$ ا = ٤

نعوض في القانون $ح_ن = ا \, ر^{ن-١}$

$ح_٨ = ٤ \times ٢^{٨-١} = ٨ \times ١٢٨ = ٥١٢$

٧ أوجد الحد السابع للمتسلسلة الهندسية التي مجموع أول (٤) حدود منها = ١٥ ، وأساسها = ٢

الحل :

تذكر

ن = ٤

ا = ؟

ر = ٢

$ح_٤$ = ١٥

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن}-١}{ر-١}\right)$

$ح_٤ = ا \left(\frac{(٢)^{٤}-١}{(٢)-١}\right)$

$١٥ = ا \left(\frac{١٦-١}{-١}\right)$

$١٥ = ا \left(\frac{-١٥}{-١}\right)$

$١٥ = ١٥ ا \Leftarrow$ ا = ١

نعوض في القانون $ح_ن = ا \, ر^{ن-١}$

$ح_٧ = ١ \times ٢^{٧-١} = ١ \times ٦٤ = ٦٤$

٧ متسلسلة هندسية مجموع أول (٥) حدود منها = ٦٢، وأساسها = ٢

الحل :

تذكر

ن = ٥

ا = ؟

ر = ٢

$ح_٥$ = ٦٢

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن}-١}{ر-١}\right)$

$ح_٥ = ا \left(\frac{(٢)^{٥}-١}{(٢)-١}\right)$

$٦٢ = ا \left(\frac{٣٢-١}{-١}\right)$

$٦٢ = ا \left(\frac{-٣١}{-١}\right)$

$٦٢ = ٣١ ا \Leftarrow$ ا = ٢

٨ كم حدًا يلزم أخذه من متسلسلة هندسية حدها الأول (٣) وأساسها (٢) ليكون المجموع (٣٨١)

الحل :

تذكر

ن = ؟

ا = ٣

ر = ٢

$ح_ن$ = ٣٨١

$ح_ن = ا \left(\frac{ر^{ن}-١}{ر-١}\right)$

$ح_ن = ٣ \left(\frac{(٢)^{ن}-١}{(٢)-١}\right)$

$٣٨١ = ٣ \left(\frac{(٢)^{ن}-١}{-١}\right)$ بالقسمة على ٣

$١٢٧ = \left(\frac{(٢)^{ن}-١}{-١}\right)$

$-١٢٧ = ١ - (٢)^{ن} \Leftarrow (٢)^{ن} = ١٢٨$

$(٢)^{ن} = ٢^{٧} \Leftarrow$ ن = ٧

واجب

كم حدًا يجب أخذه من المتسلسلة ١ + ٢ + ٤ + ... ليكون المجموع = ٥١١ ؟

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ومسائل (أسئلة الدرس)

١ أجد مجموع المتسلسلات الآتية

(١) $\sum_{ن=١}^{٤} (٢ \times ٣^{ن})$

الحل :

تذكر
$ن = ٤$
$ا = ٦$
$ر = ٣$
$ح_{ن} = ؟$

$ح_{ن} = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_{٤} = ٦ \left(\frac{(٣)^{٤} - ١}{(٣) - ١} \right)$

$ح_{٤} = ٦ \left(\frac{٨١ - ١}{٢ -} \right)$

$ح_{٤} = ٦ \left(\frac{٨٠ -}{٢ -} \right) = ٦ \times ٤٠ = ٢٤٠$

(٢) $١ + ٥ + ٢٥ + ١٢٥ + ٦٢٥$

الحل :

تذكر
$ن = ٥$
$ا = ١$
$ر = ٥$
$ح_{ن} = ؟$

$ح_{ن} = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_{٥} = ١ \left(\frac{(٥)^{٥} - ١}{(٥) - ١} \right)$

$ح_{٥} = ١ \left(\frac{٣١٢٥ - ١}{٤ -} \right)$

$ح_{٥} = ١ \left(\frac{٣١٢٤ -}{٤ -} \right) = ٧٨١$

(٣) $١ - ٤ + \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٦}$

الحل :

تذكر
$ن = ٤$
$ا = ٤$
$ر = -\frac{١}{٤}$
$ح_{ن} = ؟$

$ح_{ن} = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_{٤} = ٤ \left(\frac{(-\frac{١}{٤})^{٤} - ١}{(-\frac{١}{٤}) - ١} \right)$

$ح_{٤} = ٤ \left(\frac{\frac{١}{٢٥٦} - \frac{٢٥٦}{٢٥٦}}{\frac{١}{٤} + ١} \right)$

$ح_{٤} = \frac{٢٥٥}{٢٥٦} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٥١}{٦٤}$

٢ متسلسلة هندسية حدها الأول وأساسها (-١) جد مجموع أول (١٠) حدود منها

الحل :

تذكر
$ن = ١٠$
$ا = -١$
$ر = -١$
$ح_{ن} = ؟$

$ح_{ن} = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$

$ح_{١٠} = (-١) \left(\frac{(-١)^{١٠} - ١}{(-١) - ١} \right)$

$ح_{١٠} = (-١) \left(\frac{٠}{٢ -} \right)$

$ح_{١٠} =$ صفر

٣ أجد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية التي أساسها (٢) ومجموع أول (٤) حدود فيها = ٦٠

الحل :

$$ح_{ن} = ا \left(\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١} \right)$$

$$ح_{٤} = ا \left(\frac{(٢)^{٤} - ١}{(٢) - ١} \right)$$

$$٦٠ = ا \left(\frac{١٦ - ١}{١ -} \right)$$

$$٦٠ = ا \left(\frac{١٥ -}{١ -} \right)$$

$$٦٠ = ا ١٥ \Leftarrow \boxed{ا = ٤}$$

تذكر

$ن = ٤$

$ا = ؟$

$ر = ٢$

$ح_{٤} = ٦٠$

الوحدة الثانية

الاحصاء

١ العلاقة المعيارية

٢ التوزيع الطبيعي المعياري

٣ تمارين عامة

الدرس الأول

العلاقة المعيارية

تعريف

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يساوي (μ) وانحرافها المعياري (σ) فإن العلاقة المعيارية (ع) المقابلة للقيمة (س) تمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها القيمة (س) عن الوسط الحسابي للبيانات بالرمز

$$ع = \frac{س - u}{\sigma}$$

مثال ١ : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالبًا في التوجيهي في امتحان العربي يساوي (١٣) وانحرافها المعياري (٢) فإذا حصل ثلاث طلاب على العلامات : ١١ ، ١٣ ، ٢٣ فما القيم المعيارية المناظرة لكل منهم ؟

الحل :

$$ع = \frac{س - u}{\sigma}$$

$\Leftarrow$ س = ١١ فإن ع $= \frac{١١ - ١٣}{٢} = -١$

$\Leftarrow$ س = ١٣ فإن ع $= \frac{١٣ - ١٣}{٢} =$ صفر

$\Leftarrow$ س = ٢٣ فإن ع $= \frac{٢٣ - ١٣}{٢} = ٥$

مثال ٢ : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٥٠) طالبًا في امتحان الرياضيات يساوي (٨٠) وانحرافها المعياري (٣جد العلامة المعيارية المناظرة لكل من

٨٦ ، ٧٤ ، ٨٠

الحل :

$$ع = \frac{س - u}{\sigma}$$

$\Leftarrow$ س = ٨٦ فإن ع $= \frac{٨٦ - ٨٠}{٣} = ٢$

$\Leftarrow$ س = ٧٤ فإن ع $= \frac{٧٤ - ٨٠}{٣} = -٢$

$\Leftarrow$ س = ٨٠ فإن ع $= \frac{٨٠ - ٨٠}{٣} =$ صفر

مثال ٣ : إذا علمت أن الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الطلاب = ١٢ وكانت العلامة المعيارية المقابلة لهم ١٤ هي (١) جد الانحراف المعياري

تذكر

$u = ١٢$

ع = ١

س = ١٤

الحل :

$$ع = \frac{س - u}{\sigma}$$

$$١ = \frac{١٤ - ١٢}{\sigma}$$

$\sigma = ٢$

مثال ٤ : إذا كان الوسط الحسابي لأطوال مجموعة من الأشخاص هو (١٦٠ سم) وانحرافها المعياري (٥) وكانت العلامة المعيارية المقابلة للطول (س) تساوي (٣) جد س

تذكر

$u = ١٦٠$

ع = ٣

س = ؟

$\sigma = ٥$

الحل :

$$ع = \frac{س - u}{\sigma}$$

$$٣ = \frac{س - ١٦٠}{٥}$$

$\Leftarrow$ س $- ١٦٠ = ١٥$

$\Leftarrow$ س = ١٧٥

مثال ٥ : إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لخمس علامات حقيقية هي :

(-٠,٥ ، ك ، ٠,٥ ، ١,٥ ، ٠) جد قيمة ك

الحل :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددها}}$$

$$\Leftarrow \frac{٠.٥+ك+١.٥+٠-٠.٥}{٥} = ٠$$

$$\Leftarrow ١,٥+ك = ٠ \Leftarrow \boxed{ك = -١,٥}$$

مثال ٦ : حصل حمزة في الشعبة (أ) على علامة (٨٥) في اختبار الرياضيات وحصل وليد في الشعبة (ب) على العلامة (٨٠) في الاختبار نفسه الجدول الآتي يبين الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلا الشعبتين أي الطالبين تحصيله أفضل ؟

الشعبة	u	σ
أ	٧٩	٦
ب	٧٦	٢

الحل :

$$ع = \frac{u-س}{\sigma}$$

$$ع_{\text{حمزة}} = \frac{٨٥-٧٩}{٦} = ١$$

$$ع_{\text{وليد}} = \frac{٨٠-٧٦}{٢} = ٢$$

تحصيل وليد أفضل من تحصيل حمزة

مثال ٧ : حصل أحمد في الشعبة (أ) على علامة (٩٠) في اختبار التاريخ بينما حصل خالد في الشعبة (ب) على علامة (٧٥) في الاختبار نفسه فإذا كان الوسط الحسابي لعلامات التاريخ في الشعبة (أ) هي (٨٥) والانحراف المعياري لها (٥) وكان الوسط الحسابي لعلامات التاريخ في الشعبة (ب) = (٥٥) والانحراف المعياري لها يساوي(١٠) أيًا كان تحصيله أفضل ؟

الحل :

$$ع = \frac{u-س}{\sigma}$$

$$ع_{\text{أحمد}} = \frac{٨٥-٩٠}{٥} = ١$$

$$ع_{\text{خالد}} = \frac{٥٥-٧٥}{١٠} = ٢$$

تحصيل خالد أفضل من تحصيل أحمد

مثال ٨ : إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من الطلاب في امتحان الانجليزي يساوي (٧) والانحراف المعياري للعلامات (٥) أوجد

(أ) العلامة المعيارية للعلامة (٨٠)

الحل :

$$ع = \frac{u-س}{\sigma}$$

$$ع_{٨٠} = \frac{٧٠-٨٠}{٥} = ٢$$

(ب) كم انحرافًا معياريًا تنحرف العلامة ٧٥ عن وسطها الحسابي ؟

المقصود هنا هو العلاقة المعيارية

$$ع = \frac{u-س}{\sigma}$$

$$ع_{٧٥} = \frac{٧٠-٧٥}{٥} = ١$$

ح العلامة التي تنحرف فوق الوسط (٣) انحرافات معيارية

$ع = \frac{س - u}{\sigma}$

$٣ = \frac{س - ٧٠}{٥}$

$س - ٧٠ = ١٥$

$\Leftarrow س = ٧٠ + ١٥$

$\Leftarrow$ س ٨٥

تذكر

$u = ٧٠$

$ع = ٣$

$س = ؟$

$\sigma = ٥$

تمارين ومسائل (أسئلة الدرس)

١ إذا كان $u = ٥٠$ ، $\sigma = ٤$ ما العلامة المعيارية (ع) التي تقابل العلامة (س = ٢٨)

الحل :

$ع = \frac{س - u}{\sigma}$

$\Leftarrow$ س = ٢٨ فإن $ع = \frac{٢٨ - ٢٠}{٤} = ٢$

٢ إذا كان مجموع علامات ٥٠ طالبًا في امتحان التاريخ يساوي ١٠٠٠ وانحرافها المعياري $\frac{٥}{٢}$ ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة (١٥) ؟

الحل :

الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددها}} = \frac{١٠٠٠}{٥٠} = ٢٠$

$ع = \frac{س - u}{\sigma}$

$\Leftarrow$ س = ١٥ فإن $ع = \frac{١٥ - ٢٠}{\frac{٥}{٢}} = -٥ \times \frac{٢}{٥} = -٢$

٣ إذا كان الوسط الحسابي لأطوال (٢٠) طالب يساوي (١٥٠) سم وانحرافها المعياري = ٢ سم ما الطول الذي علامته المعيارية = ٣

الحل :

$ع = \frac{س - u}{\sigma}$

$٣ = \frac{س - ١٥٠}{٢}$

$\Leftarrow س - ١٥٠ = ٦$

$\Leftarrow س = ٦ + ١٥٠$

$\Leftarrow$ س = ١٥٦

تذكر

$u = ١٥٠$

$ع = ٣$

$س = ؟$

$\sigma = ٢$

٤ إذا كان الوسط الحسابي لكتلة مجموعة من الأشخاص يساوي (٥٠) كجم وانحرافها المعياري يساوي σ كجم وكانت العلامتان المعياريتان المقابلتان للكتلتين س ، ٦٠ هما −٢ ، ٤ على الترتيب

أ ما قيمة كل من س ، σ ؟

الحل :

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - u}{\sigma}$$

$$٤ = \frac{٦٠ - ٥٠}{\sigma}$$

$$\Leftarrow ٤\sigma = ١٠$$

$$\Leftarrow \boxed{\sigma = ٢,٥}$$

$$، -٢ = \frac{\text{س} - ٥٠}{2.5}$$

$$\Leftarrow \text{س} - ٥٠ = -٥$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٥٠ - ٥$$

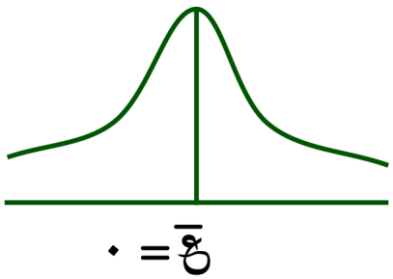
$$\Leftarrow \text{س} = ٤٥$$

الدرس الثاني

التوزيع المعياري الطبيعي

تعريف

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها ، بوسط حسابي يساوي صفر ، وانحراف معياري يساوي ١



$\bar{ع} = ٠$

خصائصه

١ متماثل حول $\bar{ع} = ٠$

٢ يقسم المحور الأفقي فيه بمقدار انحراف معياري واحد بكل وحدة

٣ المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي وحدة مربعة واحدة

⇐ نسبة المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي عند م (ع > ع١) إلى المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي المساحة تحت (ع = ع١)

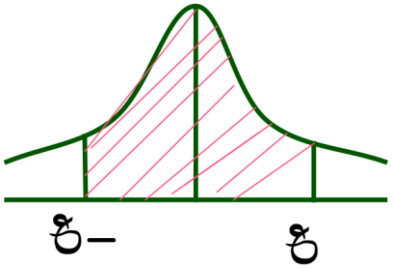
حالات ايجاد المساحة من الجداول

١ المساحة تحت (ع = ± ١) نستخرج من الجدول مباشرة

٢ المساحة فوق (ع = ± ١) = ١ – المساحة من الجدول

٣ المساحة المحصورة بين أي علامتين معياريتين مختلفتين تساوي المساحة الكبرى – الصغرى

وتحسب من جدول التوزيع الطبيعي المعياري



٤ طرق ايجاد المجهول في المسائل

٥ ايجاد المساحة (العدد الكلي والأشخاص)

= عدد الأشخاص ÷ العدد الكلي

٦ النسبة المئوية لمساحة ما

= نسبة المساحة × ١٠٠ ٪

٧ عدد مفردات ما =

نسبة المساحة للمفردات × العدد الكلي للمفردات

ملاحظات هامة

١ عند حساب المساحة يلزم تحويل العلامة الخام (س) إلى علامة معيارية (ع) لتتناسب مع الجدول

٢ أقل من ، تحت ، على الأكثر تعطي نفس المعنى (من الجدول مباشرةً)

٣ أكثر من ، فوق ، على الأقل تعطي نفس المعنى

(١ – القيمة من الجدول)

٤ تتراوح – محصورة ، تعطي نفس المعنى

(الكبير – الصغير)

٥ المساحة فوق (ع) = المساحة تحت (– ع)

٦ المساحة فوق (– ع) = المساحة تحت (ع)

باستخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد

❶ المساحة تحت (ع = ١,٢٣)

الحل

هنا يتم حسابها من الجدول مباشرة وتحدد من تقاطع الصف (١,٢) ومن العمود (٠,٠٣) بحيث ان تقاطع العمود مع الصف يمثل المساحة

وهي (٠,٨٨٨٨)

❷ عندما (ع ≥ ٢,١٤)

الحل

هنا يتم حسابها من الجدول مباشرة وتحدد من تقاطع الصف (٢,١) ومن العمود (٠,٠٤) بحيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل المساحة

وهي (٠,٩٨٣٨)

❸ المساحة فوق(ع = ٢,١)

الحل

المساحة فوق(ع = ٢,١)

تساوي ١ - المساحة تحت(ع = ٢,١)

⇐ ١ – ٠,٩٨٢١ = ٠,٠١٧٩

❹ عندما (ع ≤ -١)

الحل

المساحة فوق(ع = -١)

تساوي ١ - المساحة تحت(ع = -١)

⇐ ١ – ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٤١٣

❺ عندما (-٠,٣ ≤ ع ≤ ٠,٣٧)

الحل

المساحة تحت(ع = ٠,٣٧) - المساحة تحت(ع = ٠,٣) = ٠,٦٤٤٣ – ٠,٣٨٢١ = ٠,٢٦٢٢

مثال ❶ أوجد قيمة العلامة المعيارية (غ) في كل من الحالات الآتية :

❶ المساحة تحت (ع) هي ٠,٩٦٥٦

الحل

هنا نقوم بالبحث في جدول توزيع

الطبيعي المعياري مباشرة عن المساحة

٠,٩٦٥٦ ونأخذ تقاطع الصف مع العمود

الذي يمثل قيمة المساحة وهي

(ع = ١,٨٢)

❷ المساحة فوق (ع) هي (٠,٩٠٣٢)

الحل

١- ٠,٩٠٣٢ = ٠,٠٩٦٨

نقوم بالبحث في جدول لبحث الطبيعي

المعياري مباشرة عن المساحة

٠,٠٩٦٨ وهي ع = -١,٣

❸ المساحة (٠,٥٢ ≤ ع ≤ ل) = ٠,١٥

الحل

المساحة تحت (ع = ل) – المساحة تحت ٠,٥٢ = ٠,١٥

المساحة تحت (ع = ل) = ٠,٦٩٨٥ + ٠,١٥ = ٠,٨٤٨٥

نقوم بالبحث في جدول التوزيع المعياري مباشرة عن المساحة ٠,٨٤٨٥ وهي (ع = ١,٠٣)

④ المساحة بين – ح ، ح هي ٠,٨

الحل

المساحة تحت (ح = ح) – المساحة (ح = – ح) = ٠,٨

٢ × المساحة تحت ح – ١ = ٠,٨

٢× المساحة تحت = ١,٨

المساحة تحت ح = ٠,٩

ح = ١,٢٩

مثال ٢ تقدم عشرة آلاف طالب لاختبار مبحث الرياضيات فإذا كانت درجات الطلاب تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بوسط حسابي (٧٢) وانحراف معياري (٨) ما عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن (٨٠) ؟

الحل

μ = ٧٠ ، σ = ٥ ، س ≥ ٦٠

س ≥ ٦٠ نقوم بتحويلها لـ ح

ح = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ = $\frac{٦٠ - ٧٠}{٥}$ = – ٢ ⇐ (ح ≥ – ٢)

نبحث بالجدول عن (– ٢,٠٠)

المساحة = المساحة تحت (ح = – ٢) = ٠,٠٢٢٨

عدد الخريجين = ١٥٠٠ × ٠,٠٢٢٨ ≈ ٣٤ تقريبًا

مثال ٣ إذا كان عدد طلبة كلية الطب بجامعة الأزهر (٣٥٠) طالب وأطوالهم تتبع توزيع طبيعي معياري بوسط حسابي (١٦٠) سم وانحراف معياري (١٠) سم ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠ سم ، ١٨٥ سم ؟

الحل

μ = ١٦٠ ، σ = ١٠ ، ١٥٠ ≤ س ≤ ١٨٥

ح١ = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ = $\frac{١٥٠ - ١٦٠}{١٠}$ = – ١

ح٢ = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ = $\frac{١٨٥ - ١٦٠}{١٠}$ = ٢,٥

نسبته المساحة بين (ح = – ١) و (ح = ٢,٥)

= ٠,٩٩٣٨ – ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٣٥١

النسبة المئوية = ٠,٨٣٥١ × ١٠٠ ٪ = ٨٣,٥١ ٪

مثال ٤ تتبع أعمار مجموعة من الأشخاص التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٤) وانحراف معياري σ فإذا كانت نسبة من تزيد أعمارهم عن (٣٠) تساوي ١١,٥١ ٪ فما قيمة الانحراف المعياري

الحل

المساحة ١١,٥١ ٪ تعني $\frac{١١.٥١}{١٠٠}$ = ٠,١١٥١

المساحة = ١ – ٠,١١٥١ = ٠,٨٨٤٩

الآن نقوم بالبحث في الجدول عكسيًا

عن القيمة ٠,٨٨٤٩ نجد ح من الجدول بعد البحث وهي ح = ١,٢ = $\frac{١٢}{١٠}$

ح = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

$\frac{١٢}{١٠}$ = $\frac{٣٠ - ٢٤}{\sigma}$

$\frac{١٢}{١٠}$ = $\frac{٦}{\sigma}$ ⇐

١٢ σ = ٦٠ ⇐

σ = ٥ ⇐

وختامًا نحمد الله على نهاية هذه السنة المليئة بالتعب والسهر والاجتهاد كان عامًا مليئًا بالرياضيات

ادعو الله لكم بالتوفيق والسداد والنجاح والتفوق

محبكم والداعي لكم بالخير

الاستاذ / حمزة