



الفصل الدراسي الاول

التفاضل

Differentiation

فلسطين
بالقلب

samer rashad

2007

المحتويات

الوحدة

حساب التفاضل Differentiation

١ - ١	متوسط التغير (Rate of Change)
٢ - ١	قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)
٣ - ١	مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)
٤ - ١	قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)
٥ - ١	تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)
٦ - ١	قاعدة السلسلة (Chain Rule)
٧ - ١	الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation)

متوسط التغير

1

التعريف :

إذا كان $v = v(s)$ اقتراناً وتغيرت s من s_1 إلى s_2

١. مقدار التغير $\Delta s = s_1 - s_2$

٢. متوسط التغير $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_1 - v_2}{s_1 - s_2} = \frac{v(s_1) - v(s_2)}{s_1 - s_2}$

مثال

$$v(s) = \frac{3}{s} + s^2$$

جد متوسط تغير $v(s)$ عندما

تتغير s من ٣ إلى ٥

$$v(s) = s^3 - 5s + 3$$

١. Δs عندما تتغير s من ١- إلى ٢

٢. التغير في $v(s)$ عندما تتغير s

من ١- إلى ٢

$$v(s) = \sin s - 3 \cos s$$

جد متوسط تغير $v(s)$ في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

٣. متوسط التغير في $v(s)$ عندما

تتغير s من ١- إلى ٢

مثال

$$\text{إذا كان } \left. \begin{array}{l} 2 \geq s, [1-s] \\ 2 < s, s^2 + 1 \end{array} \right\} = (s)$$

وكان $s_1 = \text{صفر}$

$s_2 = 5$

احسب متوسط تغير (s)

مثال

$$\text{إذا كان } \left. \begin{array}{l} 2 > s, s - 6 \\ 2 \leq s, s^2 + 1 \end{array} \right\} = (s)$$

وكان متوسط تغير (s) عندما تتغير s من (١) إلى (٢) يساوي ٩ ، حيث $2 < 1$
جد ١

$$\text{إذا كان } (s) = s^2 + 7$$

وكان متوسط التغير في الفترة $[s_1, s_2 + 3]$

يساوي ١٢ ، جد s_1

$$\text{إذا كان } (s) = s + s^{1+}$$

احسب متوسط التغير في الفترة $[0, 1]$

مثال

إذا كان $u(s) = \sqrt{s^2 + 1}$

وكان متوسط تغير $u(s)$ عندما تتغير s من (0) إلى (b) يساوي $\frac{1}{4}$ ، جد b حيث $b < 0$.

مثال

إذا كان $u(s) = s^2 + 3s$ جد متوسط تغير $u(s)$ عندما تتغير s من 2 إلى $2 + h$

مثال

إذا كان $u(s) = \begin{cases} s^2, & s \leq 1 \\ s - 1, & s > 1 \end{cases}$ جد متوسط التغير في الفترة $[1, 1+h]$

تمرين

١. إذا كان متوسط تغير $u(s)$ في الفترة $[1, 13]$ يساوي 11 ، جد قيمة u (الجواب : $u=1$)

٢. إذا كان $u(s) = s^2 + 2s + 3$ ، أثبت أن متوسط تغير $u(s)$ في الفترة $[2, n]$

يساوي $1(n+2) + b$

مثال

إذا كان متوسط تغير $u(s) = s + \ln s$ ، $s < 0$ ، عندما تتغير s من ١ إلى h يساوي $\frac{h-3}{h-1}$ ، جد u

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران $u(s)$ في الفترة $[1, 3]$ يساوي ٤ وكان $u(s) = s^2 + 3u(s)$ ، جد متوسط تغير $u(s)$ في نفس الفترة

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران $u(s)$ في الفترة $[1, 5]$ يساوي ٣ وكان متوسط تغير $u(s)$ في $[1, 5]$ يساوي ٢ وكان $u(s) = s \cdot u(s)$ ، جد $u(1)$

إذا كان متوسط تغير $v(s)$ في الفترة $[2, 5]$ يساوي (-6) وكان $v = (2) + (5)v = 4$ جد متوسط تغير $l(s) = 7s + v^2(s)$ في $[2, 5]$

تعريف :

منحنى $v(s)$ يمر بالنقطتين أ ، ب والمستقيم

يمر بالنقطتين أ ، ب

ميل القاطع :

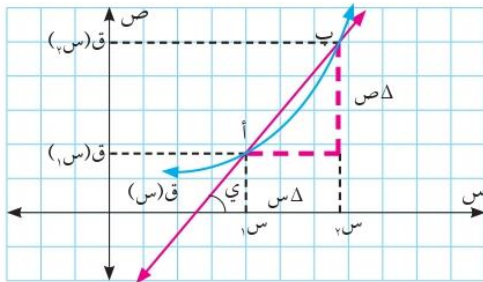
$$\frac{v(s_1) - v(s_2)}{s_1 - s_2} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

تعريف :

إذا كان $f(n)$ المسافة التي يقطعها الجسم ، n الزمن

➤ متوسط تغير المسافة من n_1 إلى n_2

$$\frac{f(n_1) - f(n_2)}{n_1 - n_2} = \frac{\Delta f}{\Delta n} \quad \text{➤ السرعة المتوسطة}$$



إذا قطع المستقيم L منحنى C (س) في النقطتين $(1, 1)$ ، $(3, 3)$ (ب) وصنع زاوية مقدارها 135° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، احسب متوسط تغير $h(s) = 3s + s^2 - 1$ في الفترة $[1, 3]$

إذا قطع المستقيم L منحنى C في النقطتين $(0, 0)$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

- جد ميل المستقيم L
- جد قياس زاوية ميل المستقيم L

إذا كان القاطع الواصل بين النقطتين $(-2, -2)$ ، $(3, 6)$ يصنع زاوية مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد $C(-2)$

مثال

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب $ف(ن) = ٨ + ٢ن$

➤ جد السرعة المتوسطة في $[١ ، ٣]$

➤ إذا كانت السرعة المتوسطة في $[١ ، ٣]$ يساوي $١٣ م / ث$ ، جد ١

تمرين

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب $ف(ن) = ٢ن + ب$ وكانت السرعة المتوسطة في $[١ ، ٣]$ تساوي $٦ م / ث$ ، جد قيمة $ب$ ؟

سؤال

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١. إذا كان متوسط تغير $ن(س)$ في $[١ ، ٣]$ يساوي ٨ ، جد متوسط تغير $ه(س) = \frac{٦}{ن(س)}$ في

$[١ ، ٣]$ حيث $٤ = (٣)ن \times (١)ن$

(د) $\frac{٣-}{٤}$

(ج) $\frac{٣}{٤}$

(ب) $١٢-$

(أ) ٢

٢. إذا كان متوسط تغير $ن(س)$ في $[١ ، ٤]$ يساوي ٦ ، جد متوسط تغير $ه(س) = (س)٢$ في $[١ ، ٤]$ ،

حيث $٥ = (٤)ن \times (١)ن$

(د) ١٨

(ج) ٣٠

(ب) ٥

(أ) ٣٦

٣. $\left. \begin{array}{l} ٣ > س ، ٣ + س \leq ٥ \\ ٣ \leq س ، ١٢ + س \end{array} \right\}$ وكان متوسط تغير $ن(س)$ في $[١ ، ٤]$ يساوي (٨) ، جد ١

(د) ٥

(ج) ٢

(ب) ٤

(أ) ٣

الوحدة الأولى : حساب التفاضل

٤. إذا كان متوسط تغير $u(s) = s^2 - 4s$ في $[1, 3]$ يساوي (12) ، جد u

- (أ) (ب) (ج) (د)

٥. يقطع مستقيم l منحنى $u(s)$ في النقطتين $(1, 14)$ ، $(2, 44)$ ، وكان ميل المستقيم l يساوي (2) ، جد u

- (أ) (ب) (ج) (د)

٦. إذا كان $u(s) = \sqrt{s^2 - 9}$ ، $1 \leq s \leq 4$ ، حيث $0 < u$ ، وكان متوسط تغير $u(s)$ في $[1, 6]$ تساوي $\frac{1}{3}$ ، جد u

- (أ) $\frac{15}{4}$ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ١٥

٧. يتحرك جسم حسب $f(u) = \begin{cases} 2u^2, & 0 < u \leq 2 \\ 1 - 3u, & 2 < u \end{cases}$ ، وكانت السرعة المتوسطة في الفترة $[1, 3]$ تساوي ٩ م/ث ، جد u

- (أ) ١٢ (ب) ١٢- (ج) ١١ (د) ١١-

٨. إذا كان $u(s) = (s^2 + s)^{-1}$ ، وكان مقدار التغير في $u(s)$ عندما تتغير s من (1) إلى s^2 تساوي $\frac{1}{3}$ ، جد s^2 حيث $s^2 < 0$

- (أ) (ب) (ج) (د)

٩. إذا كان متوسط تغير $u(s)$ في الفترة $[-1, 4]$ يساوي (6) وكان $u(4)$ يساوي ٣ أمثال $u(-1)$ ، جد $u(4)$

- (أ) ١٥- (ب) ٤٥ (ج) ١٥ (د) ٤٥-

١٠. إذا كان متوسط تغير $h(s)$ على الفترة $[1, 3]$ يساوي (4) وكان معدل تغير $u(s) = 3h(s) - \frac{1}{s}$ على الفترة نفسها يساوي ١٣ ، جد u

- (أ) (ب) (ج) (د)

قواعد الإشتقاق

٢

التعريف العام :

قاعدة (١) :

مشتقة الأعداد $\leftarrow u(s) = k \leftarrow u'(s) = 0$ = صفر

قاعدة (٢) :

مشتقة المتغيرات $\leftarrow u(s) = v \leftarrow u'(s) = v' \leftarrow u(s) = v \leftarrow u'(s) = v'$

قاعدة (٣) :

مشتقة الضرب

إذا كان $u(s) = v(s) \times w(s)$

$\leftarrow u'(s) = v'(s)w(s) + v(s)w'(s)$

٧. $u(s) = s^0 - s^2 + s$ حيث s ثابت جد $u'(1)$

• جد $u'(s)$ لكل مما يلي :
١. $u(s) = 5$

٢. $u(s) = -7 + s$

٣. $u(s) = \pi + \pi s$

٤. $u(s) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}s$

٥. $u(s) = 5s - 3$

٦. $u(s) = s^3 - 2s + 5$ جد $u'(-2)$

١٠. $u(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s^4}$ جد $u'(1)$

٩. $u(s) = (s-1)(s+1)(s+1)(s+1)(s+1)$ جد $u'(1)$

٨. $u(s) = (1-s^2)(s+12)$ جد $u'(3)$

مثال

إذا كان $٥ = (١)^\circ$ ، $٣ = (١)^\circ$ ،
 وكان $ل(س) = ٢س + (١)^\circ - (٣)^\circ$ ،
 جد $ل(١)^\circ$

$\xi = (\text{س})' \cup \text{ا} = (\text{س})' \cup \text{و} \text{كا} = (\text{س})' \cup \text{ا} = (\text{س})'$

جد :

(۱) $(۲) \div (۵ - ۷)$

(۲) $(۲) \div (۵۲ + ۷۳)$

$$ل(س) = ٢٢ - (س) - ٣س + ٢ه(س)$$

وكان ل(١) = ٢ ه(١) = ٤ ، جد ل'(١)

$$إذا كان ل(س) = ٧ - ٢س + ٢س + \frac{٣(س)}{٣}$$

وكان ل'(٢) = -٣ ، جد ل'(٢)

$$٣س = (س)ه + ل(س)$$

ه(٢) = ل(٢) = ٣ ، وكان ه(٢) = ل(٢) = ٤ ، جد ل'(٢)

$$إذا كان ل(س) = ٥ - ٢س + ٤س + ٥$$

وكان ل'(٢) = ٥ ، جد ل'(٢)

الوحدة الأولى : حساب التفاضل

قاعدة (٤) :

مشتقة القسمة

$$\left(\frac{u}{v} \right)' \leftarrow \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (1) \text{ اقتران عدد}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' \leftarrow \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (2) \text{ عدد اقتران}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' \leftarrow \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3) \text{ اقتران اقتران}$$

مثال

$$u = (x^2 - 5x + 3)^2, \quad u' = 2(x^2 - 5x + 3) \cdot (2x - 5)$$

$$u = \frac{1}{x^3} + \frac{x^2}{1-x}, \quad u' = -\frac{3}{x^4} + \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2}$$

$$u = \frac{x^2 - 2}{x + 3}, \quad u' = \frac{2x - 2}{(x + 3)^2} \quad \text{وكان } u' = \frac{3 - x}{x^4}$$

$$u = \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^4}{4}, \quad u' = 5x^2 - 7x^3$$

$$\frac{5}{(3-s)} = (s) \text{ إذا كان } (s) \text{ جد}$$

$$\text{وكان } (s) = (2) \text{ ، } 1 = 3 - 2$$

بالإعتماد على الجدول :-
جد

(1) هـ	(1) هـ	(1) س	(1) س
3-	1-	3	2

$$(1) \left(\frac{h+s}{1+s^2} \right)$$

$$(2) \left(\frac{3}{h} - s^2 \right)$$

تمرين

$$(1) \text{ جد هـ } (1) \frac{3+s^2}{s+h} = (s) \text{ س}$$

$$2 = (1) \text{ هـ } ، 1 = (1) \text{ س}$$

$$(2) \text{ جد هـ } (1) \frac{4+s}{s^2} = (s) \text{ س}$$

$$1 = (2) \text{ س}$$

$$\frac{s^2-3}{5+s} = (s) \text{ س}$$

$$2 = (2) \text{ هـ } ، 6 = (2) \text{ س}$$

$$(2) \text{ س}$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١. هـ (س) = س^٣ (س) ، (٢) = ٣- ، (٢) = ٥ ، جد هـ (٢)

أ) ٩ ب) ٤- ج) ٤ د) ٩-

٢. (س) = $\frac{1+s^2}{s}$ ، جد (٣)

أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) ٣

٣. إذا كان (١ + س) = ٢ + ١ = ٤ س^٣ ، جد (١-)

أ) ٤ ب) ٤- ج) ٢ د) ٢-

٤. (س) = $\frac{s}{1+s^2}$ ، جد أصفار المشتقة الأولى :

أ) {١ ±} ب) {٢ ±} ج) {٣ ±} د) {٤ ±}

٥. (١) = ٣ ، (١) = ١- ، (١) = ٢ ، (١) = ٥ ، جد $\left(\frac{h}{u}\right)$

أ) $\frac{17}{9}$ ب) $\frac{17}{9}$ ج) $\frac{9}{17}$ د) $\frac{9}{17}$

قاعدة (٥) :

مشتقة المتشعب وأكبر عدد صحيح :-

← القاعدة العامة :

مثال

$$\left. \begin{array}{l} s^3 + 1, s > 1 \\ s^2 + s, s \geq 1 \\ s^5, s < 4 \end{array} \right\} = (s)$$

جد ،

$$s^{(-2)}, s^{(7)}, s^{(3)}, s^{(1)}, s^{(4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} s^2, s \leq 2 \\ s^4, s > 2 \end{array} \right\} = (s)$$

جد ، $s^{(2)}$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s, \quad 1 + s^2 \leq b \\ 1 > s, \quad 1 + s^3 \leq s \end{array} \right\} = (s) \cup$$

، جد a, b حيث $\cup$ قابل للإشتقاق على $\mathbb{C}$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \geq s, \quad 1 - s^3 \leq s \\ 1 < s, \quad 2 - s^5 \leq s \end{array} \right\} = (s) \cup$$

، جد $\cup (1)$

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s, \quad 1 + s^3 + \frac{1}{s} \leq s \\ 1 \leq s, \quad 2 + s^2 \leq s \end{array} \right\} = (s) \cup$$

، جد $\cup (1)$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s, \quad 1 - s^2 \leq b \\ 2 < s, \quad 4 - b \leq 1 + s^3 \end{array} \right\} = (s) \cup$$

، وكان $\cup$ قابلاً للإشتقاق على $\mathbb{C}$ ، جد a, b

إستنتاج :-

$$u(s) = (s)^2, \quad h(s) = [s^2]$$

جد ،

$$(1) \quad u'(0)$$

$$(2) \quad h'(0)$$

$$(3) \quad (u \times h)'(0)$$

$$u(s) = (s)^2, \quad [s] = s^2, \quad \text{حيث}$$

$$s \in [0, 2]$$

$$\text{جد } u'(s)$$

قاعدة :-

المشتقات العليا :-

$$u(s) = s^0 + s^1 + s^2 + \dots + s^n$$

جد $u^{(4)}(s)$

$$u(s) = \frac{s^5}{3} - \frac{s^8}{2} + \frac{s^{12}}{12}$$

جد $u'''(s)$

$$u(s) = \frac{16}{s} + 2s^4$$

جد $u'''(2)$

$$v = \frac{1}{s}$$

جد المقدار $s^2 v'' + s v' + v$

$$v = \frac{s}{1+s}$$

جد المقدار $2v'' + s v' + v''$

$$٣-٣ \text{ س } ٤ + ٣-٣ \text{ س } ٣ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، وكان } ٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، جد } ٣$$

$$\text{س } ٤ + ٣-٣ \text{ س } ٣ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، وكان } ٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، جد } ٣$$

$$٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، وكان } ٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، جد } ٣$$

$$٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، وكان } ٣-٣ \text{ س } ٤ = ٣-٣ \text{ س } ٤ \text{ ، جد } ٣$$

مثال

إذا كان $s^0 + s^{\frac{5}{4}}$

أثبت $\frac{20}{s^2}$

مثال

إذا كان $s^{\frac{b}{1-s}} + s^{\frac{c}{1-s}}$

أثبت أن $s^{\frac{2}{1-s}} = n(1-n)$ ص

ورقة عمل

١. $u = (s) = \frac{1}{s} + s^2$ ، $s < 0$ وكان $u' = (1) = 36$ ، جد s

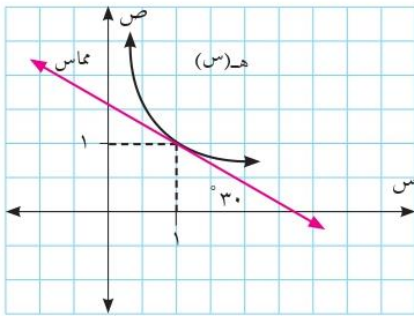
(د) ٤

(ج) ١

(ب) ٢

(أ) ٣

٢. إذا كان $u = (s) = \frac{s}{1+s^2}$ والشكل المجاور يمثل $u = (s)$ ، جد $u' = \left(\frac{u}{s}\right) = (1)$



٣. $u = (s) = 4s^{1/2}$ ، وكان $u' = (s) = 1$ ، جد $u - 1 = 2$

(د) ٨

(ج) ٢

(ب) ١٦

(أ) ١٩

٤. u كثير حدود من الدرجة الثانية $u = (1) = 2$ ، $u' = (1) = 3$ ، جد قاعدة u

٥. $u = (1) = 2$ ، $u' = (1) = 5$ ، $u'' = (1) = 2$ ، $u''' = (1) = 1$ ، جد $u = (u \times h) = (1)$

$$6. \quad \begin{aligned} 2 &= (3) \cup \\ 5 &= (3) \cup \end{aligned} \quad \text{وكان هـ (س) = س}^2 \cup (س) \cup \frac{8}{(س) \cup} \text{، جد هـ (3)}^{\leftarrow}$$

$$7. \quad \begin{aligned} 5 &= (4) \cup \\ 1- &= (4) \cup \end{aligned} \quad \text{جد ، } \left(\frac{\cup}{\cup} \right)^{\leftarrow} (4) \quad \begin{aligned} 2 &= (4) \cup \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} 1 &= (2) \cup \\ 2 &= (2) \cup \end{aligned} \quad \text{جد ، } (2) \cup (هـ \times هـ) \quad \begin{aligned} 3 &= (2) \cup \\ \frac{8}{س} &= (س) هـ \end{aligned}$$

$$9. \quad \text{ص} = \frac{2}{س} \text{، جد ص بدلالة ص}$$

$$10. \quad \begin{aligned} 2- &= (1) \cup \\ 1- &= (1) \cup = (1) \cup \end{aligned} \quad \text{وكان هـ (1) = ل}^2 \cup (س) \cup \frac{(س) \cup}{(1+^2 س) \cdot (س) \cup} \text{، جد ل (1)}^{\leftarrow} \quad \begin{aligned} 3 &= (1) \cup \end{aligned}$$

$$11. \quad \text{ل} \cup (س) = س \cup (س) + 1 \text{، جد ل}^{\leftarrow} (2)$$

$$12. \quad \begin{aligned} 3 &= (س) \cup \\ 1- &= (1) هـ \end{aligned} \quad \text{جد ، } (هـ \cdot هـ)^{\leftarrow} (1) \quad \begin{aligned} 2 &= (1) هـ \end{aligned}$$

١٣. $\neg (س) = (س) \wedge \frac{1}{x} = 0$ ، $\exists x \wedge (س) = (س) \wedge (1+x) = 0$ ، جد ١

١٤. $\neg (س) = (س) \wedge \frac{1}{x} + 1 = 0$ ، $\neg (س) = (س) \wedge 90 = 0$ ، جد ١

١٥. $\neg (س) = (س) \wedge \left\{ \begin{array}{l} 1 < س ، ٨ - س + ٢ = ٠ \\ ١ \geq س ، ٢ + س - ٣ = ٠ \end{array} \right\}$ ، $\neg (س) = (س) \wedge \text{قابل للإشتقاق على } ع$ ، جد ١ ، ب

مشتقة الإقترانات المثلثية

٣

جاس ← جتاس

جتاس ← -جاس

ظاس ← قاس^٢س

ظتاس ← -قتاس^٢س

قاس ← قاس ظاس

قتاس ← -قتاس ظتاس

مثال

$$٧(س) = قاس + ظاس ، جد ٧\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$٧(س) = س جاس ، جد ٧\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

إذا كان $ص = قتاس + ظتاس$ ، أثبت أن :

$$ص' = ٢ قتاس - ٢ قتاس^٣$$

$$٧(س) = \frac{س^٢}{جتاس} ، جد ٧(س)$$

مثال

$$ص = \frac{١ - قاس}{١ + قاس}$$

مثال

$$ص = \frac{س}{ق تاس + ظ تاس}$$

مثال

$$ص = ظ تاس ، أثبت أن ص = ٢ ص (١ + ص)$$

مثال

$$ص = \frac{جاس}{س} ، أثبت ص'' = ص + \frac{ص^2}{س} + ص = ٠$$

مثال

$$ص(س) = \frac{س^2}{٢} - جتاس ، س \in [\pi^2, \pi^2] \text{ جد قيم } ص ، حيث ص''(س) = ٠$$

مثال

$$ص = قتاس ، جد \frac{ص^2}{س} \text{ عند } س = \frac{\pi}{٢}$$

مثال

$$u(s) = \frac{1 + \text{ظاس}}{\text{جاس}} \quad \text{جد} \quad u\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تمرين

$$1. \text{ ص} = \text{قاس} + \text{ظاس} \quad \text{أثبت} \quad \frac{1}{\text{جاس} - 1} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$2. u(s) = \frac{1}{\text{ظاس جتاس}} \quad \text{جد} \quad u(s)$$

$$3. \text{ ص} = \text{جتاس} \quad \text{جد} \quad \text{ص} + \text{ص} //$$

مثال

$$\text{إذا كان} \quad \text{ص} = \text{س ظاس} , \quad \text{أثبت} \quad \text{ص} = 2(1 + \text{ص}) \text{ قاس}^2$$

مثال

$$\text{إذا كان} \quad \text{ص} = \text{ظتاس} + \text{قتاس} , \quad \text{أثبت} \quad \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} = \text{ص}^2 \text{ قتاس}$$

قاعدة لوبيتال ومشتقة الإقتران الأسّي واللوغاريتمي

قاعدة لوبيتال :-

٧ (س) ، هـ (س) قابلين للإشتقاق عند النقطة $س = ١$ ، $ل \ni ع$

$$\frac{٧(١)}{هـ(١)} = \div ، \frac{٧(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow ١}{\rightarrow} ل ، \frac{٧(س)}{هـ(س)} \underset{س \leftarrow ١}{\rightarrow} ل$$

مثال

باستخدام قاعدة لوبيتال جد :-

$$\frac{٧}{س} \underset{س \leftarrow ٠}{\rightarrow} \frac{٧}{س}$$

$$\frac{٧-٢}{س-٢} \underset{س \leftarrow ٢}{\rightarrow} \frac{٧-٢}{س-٢}$$

$$\frac{٧-٣}{س-٣} \underset{س \leftarrow ٣}{\rightarrow} \frac{٧-٣}{س-٣}$$

$$\frac{٧-١}{س} \underset{س \leftarrow ٠}{\rightarrow} \frac{٧-١}{س}$$

$$\frac{٧-١}{س} \underset{س \leftarrow ٠}{\rightarrow} \frac{٧-١}{س}$$

$$\frac{٧-٤}{س} \underset{س \leftarrow ٠}{\rightarrow} \frac{٧-٤}{س}$$

الوحدة الأولى : حساب التفاضل



الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح⁺

١ $\log_{\text{س}} \text{ص} = \log_{\text{س}} \text{ص} + \log_{\text{س}} \text{ص}$

٢ $\log_{\text{س}} \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \log_{\text{س}} \text{ص} - \log_{\text{س}} \text{ص}$

٣ $\log_{\text{س}} \text{ص}^n = n \log_{\text{س}} \text{ص}, \text{ص} > 0$

٤ $\log_{\text{س}} \text{ص} = \log_{\text{س}} \text{ص}$



الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١ $\text{ص}^{\text{ص}} = \text{ص}^{\text{ص}} = \text{ص}^{\text{ص}}$

٢ $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$

٣ $(\text{ص})^{\text{ص}} = \text{ص}^{\text{ص}}$

٤ $\text{ص}^1 = \text{ص}$

٥ $\text{ص}^{\log_{\text{س}} \text{ص}} = \text{ص}, \text{ص} > 0$

$\log_{\text{س}} (\text{ص}) = \log_{\text{س}} \text{ص}$

$\frac{1}{\text{ص}} = (\text{ص})^{-1}$

المشتقة $\leftarrow \begin{matrix} \text{ص} = \text{ص}^{\text{ص}} \\ \text{ص} = \text{ص}^{\text{ص}} \end{matrix}$

$\log_{\text{س}} (\text{ص}) = \log_{\text{س}} \text{ص}$

$\frac{\log_{\text{س}} (\text{ص})}{\log_{\text{س}} (\text{ص})} = \log_{\text{س}} (\text{ص})$

$\text{ص} = \text{ص}^{\log_{\text{س}} \text{ص}}$

$\leftarrow \text{ص} = \text{ص}^{\log_{\text{س}} \text{ص}} \cdot \log_{\text{س}} (\text{ص})$

مثال

$\log_{\text{س}} (\text{ص}) = \log_{\text{س}} (\text{ص}^2 - \text{ص}^3) = \log_{\text{س}} (\text{ص}^2 + \text{ص}^3)$

$\log_{\text{س}} (\text{ص}) = \log_{\text{س}} \text{ص}^2 + \log_{\text{س}} \text{ص}^3$

$\log_{\text{س}} (\text{ص}) = \log_{\text{س}} \text{ص}^2 + \log_{\text{س}} \text{ص}^3$

تمرين

جد مشتقة ما يلي :

$$١- \text{و} (س) = س ه س$$

$$٣- \text{و} (س) = (ه س)^\circ$$

$$٢- \text{و} (س) = ه س ل و س$$

$$٤- \text{و} (س) = \sqrt[١]{ه س^٢ + ه س^٢ + ١}$$

مثال

جد مشتقة ما يلي :

$$\text{و} (س) = ل و ه \left(\frac{س}{١+س} \right)^٢ , \text{جد و} (٢)$$

$$ص = ل و + \sqrt[٣]{\frac{س}{س}}$$

إذا كان $ص = س^٢ + ه س + ١$ وكان $ص = ص$ ،
جد قيم $س$

$$\text{و} (س) = ٦ ل و ه \sqrt[٢]{س - ٧} , \text{جد و} (١)$$

مثال

إذا كان $v = h^2 + (s+1)h$ جاس $وكان \frac{dv}{ds} = 1$ ، جد h

مثال

إذا كان $لور v = s$ ، $1 < s$ $وكان 3v - 1 = 3v + 1 = 0$ ، جد h

مثال

إذا كان $لور v = \left(\frac{2 + s + 2s^2}{s^3} \right) + h^{3-2s}$ ،
جد h (٢)

إذا كان $v = h^{1+3s}$ ، جد $\frac{dv}{ds}$ ، عند $v = 1$

إذا كان $u(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$ ، وكان $u(1) = 1$ ، جد u

$u(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$ ، جد $u(1)$ ، وكان $u(1) = 1$ ، جد u

$u(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$ ، جد $u(1)$ ، وكان $u(1) = 1$ ، جد u

إذا كان $u(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$ ، وكان $u(1) = 1$ ، جد u

مثال

باستخدام قاعدة لوبيتال جد :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{\ln x}$$

قاعدة :

نهايات على صورة مشتقة :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x-1} = \frac{(e^x)' - (x-1)'}{(x-1)'} = \frac{e^x - 1}{1} = e - 1$$

$$2- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{(e^x)' - (x)'}{x'} = \frac{e^x - 1}{1} = e - 1$$

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{\ln x} = \frac{(e^x)' - (\ln x)'}{(\ln x)'} = \frac{e^x - 1}{1/x} = x(e^x - 1) = 1(e - 1) = e - 1$$

مثال

إذا كان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ، جد :-

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - (x+2)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - (x+2)}{x-2}$$

إذا كان $u = (3)^x$ جد :-

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (3)^u}{3 - u} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (3)^u}{27 - u} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

$$\frac{u - (u + 3)}{h} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ} \quad \text{هـ} \quad \text{نـ}$$

مثال

إذا كان $u = (2)^x$ ، جد :-

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2)^x - (x)^2}{2 - x} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2)^x - (x)^2}{6 - x + x^2} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{8 - x^3}{(x)^2 - (2)^x} \right)$$

مثال

إذا كان $u = (3)^x$ ، $2 - x = (1)^x$ ، $4 = (3)^x$ ، جد :-

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(3)^x - (x^2 + 5x + 3)}{10} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1 - x^2}{(x)^2 - (1)^x} \right)$$

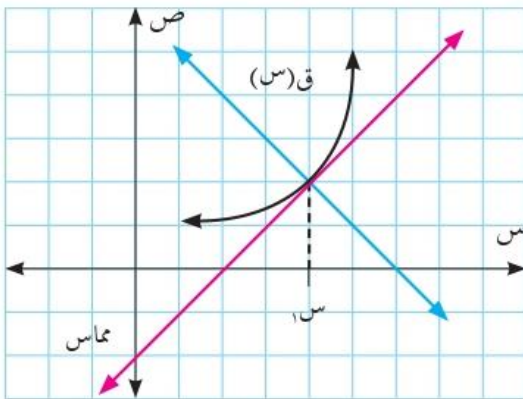
مثال

جد $\frac{d}{dx} \left(\frac{(x)^2 - (1)^x}{1 - x} \right)$ باستخدام لوبيتال علماً أن $3 = (1)^x$ ، $6 = (1)^x$

تطبيقات هندسية وفيزيائية

٥

(١) تطبيقات هندسية



معادلة المماس + العامودي

نقطة التماس

$(س١, ص١)$

ميل المماس

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} =$$

$$ص' (س١) =$$

= ظاهر

هـ : زاوية محصورة بين المماس

ومحور السينات الموجب .

$$\text{معادلة المماس} \leftarrow ص - ص١ = (س - س١) \cdot ص' (س١)$$

$$\text{معادلة العامودي} \leftarrow ص - ص١ = -\frac{1}{ص' (س١)} (س - س١)$$

جد معادلة المماس والعامودي لكل مما يأتي :

$$١) (س) = ٣ - ٣س^٢ ، عند س = \frac{\pi}{4}$$

$$٢) (س) = ٥س^٣ + ٥س ، عند س = ١$$

$$٣) (س) = ٥س - ٥س^٢ ، عند س = ٥$$

$$٤) (س) = \frac{٢س}{٥} ، عند س = ١$$

إذا كان المماس لمنحنى $١) (س) = \frac{٤}{س}$ ، $٠ < س$ ، يصنع زاوية مقدارها ٣٥° مع السينات الموجب ، أثبت أن العامودي على المماس عند نقطة المماس لمنحنى $٢) (س)$ يمر بالنقطة $(٠, ٠)$

مفاتيح الحل

حالات التقاطع

السينات $\leftarrow$ ص = ٠

الصادات $\leftarrow$ س = ٠

اقترانات $\leftarrow$ س = هـ (س)

التوازي

ميل الأول = ميل الثاني

يمس / مماساً

صورة = صورة

مشتقة = مشتقة

التعامد

ميل الأول $\times$ ميل الثاني = -١

مثال

جد معادلة المماس والعامودي لكل مما يأتي :

ما معادلة المماس لمنحنى $٨ - ٣س = (س)٢$ عندما يقطع محور السينات

جد النقطة (النقاط) على منحنى $٨ - ٣س = (س)٢$ التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم $س + ٢ص - ٤ = ٠$

مثال

جد معادلة المماس لمنحنى $U(s) = s^3$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $V = s + 6$

ما معادلة المماس لمنحنى $U(s) = s^3 + 5$ عندما يقطع محور الصادات

جد النقطة (النقاط) التي يكون عندها المماس لمنحنى $U(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s + 1}$ عمودياً على المستقيم $V = 3s + 5$

جد معادلة المماس لمنحنى $U(s) = s^2 - 2s + 1$ إذا كان عمودياً على المستقيم $V = 3s - 5 = 0$

تمرين

جد معادلة المماس لمنحنى $U(s) = \text{ظاس حبث } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ عندما يكون موازياً للمستقيم $V = 4s + 2$

جد قيمة u إذا كان $v = s^2 + 1$ الذي يجعل
المستقيم $s = \frac{v}{4}$ مماساً له

ملاحظة مهمة جداً :

جد قيمة u الذي يجعل المستقيم المار بالنقطتين
 $(0, 2)$ ، $(-3, 5)$ مماساً لمنحنى
 $v = \frac{1}{s+1}$

إذا كان $v = s^2 + 3$ يمس الإقتران
 $v = s^2 + 10s + 1$ عند $s = 1$ ،
جد u ، b

إذا كان المستقيم $s = 1 - 6v$ يمر منحنى

$$v(s) = \frac{s^3}{2-s}, \text{ جد قيم } 1$$

إذا كان المستقيم $s = 8 - 4v + 1 = 0$ يمر

$$v(s) = \frac{3}{2}s - \frac{8}{s}, \text{ جد } 1$$

$v(s) = s^2 - 1 - s$ يمر محور السينات

جد 1

$v(s) = s^2 + s + 1$ يمر محور السينات ،

جد 1

جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي ومحور السينات للإقتران $u(s) = s^2$ ، عند $(2, 4)$

ص $= s^3 + 4s$ **يمس منحنى**
 $u(s) = s^2 + 1$ **عند** $(0, 1)$ ، جد
 أ ، ب

جد مساحة المثلث المكون من المماس والمستقيم $s = 4$ ومحور السينات للإقتران $u(s) = s^2$ ، عند $(2, 4)$

ملاحظة مهمة جداً :

يتحرك جسم حسب العلاقة $v = v^3 + v^2$ ، احسب سرعة وتسارع الجسم عند $v = 5$ ،

إذا كان المماس لمنحنى $v(s) = \frac{s}{4}$ عندما $s = 2$ يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب ، ج على الترتيب ، جد مساحة المثلث $\triangle ب ج$ ، حيث θ نقطة الأصل

يتحرك جسم حسب العلاقة $v^2 = v^3 - v^4 + 18$ ، احسب سرعة الجسم عندما يكون التسارع 24 m/s^2

تطبيقات فيزيائية

المسافة $\leftarrow$ السرعة $\leftarrow$ التسارع

السرعة اللحظية $= \frac{ds}{dt} = v$

التسارع اللحظي $= \frac{dv}{dt} = a$

يتحرك جسم حسب العلاقة $f(v) = v^3 + v^2$ ،
إذا كانت سرعة الجسم عند $v = 5$ تساوي
السرعة المتوسطة في $[0, 5]$ ، جد قيمة a

$f(v) = v^3 - \frac{v^2}{3} + 7v + 12$ احسب
التسارع عندما تنعدم السرعة ؟

تحرك جسم حسب العلاقة
 $f(v) = v^3 - 9v^2 + 7v$ ، جد تسارع الجسم
عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته

$f(v) = v^3 + v^2 + 7v$ احسب المسافة والتسارع عندما
 $v \in [0, 2\pi]$ احسب المسافة والتسارع عندما
يطون الجسم في حالة سكون لحظي

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض حسب

$$f(v) = 20 - v^2$$

- ١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم
- ٢- جد سرعة الجسم وهو على إرتفاع ١٥ م من سطح الأرض
- ٣- المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى

قذف جسم رأسياً لأعلى حسب

$$f(v) = 40 - v^2$$

- ١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم
- ٢- جد سرعة الجسم وهو على إرتفاع ٦٠ م
- ٣- متى تصبح سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية ؟
- ٤- جد قيم v والتي تكون السرعة عندها موجبة
- ٥- متى يعود الجسم إلى الأرض ؟

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج حسب
ف(ن) = $۲۵ - ۳۰$

- ١- جد ارتفاع البرج علماً بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض ١٨٠ م
- ٢- سرعة ارتطام الجسم بـ سطح الأرض
- ٣- المسافة الكلية المقطوعة خلال الثواني السبعة الأولى

من قمة برج إرتفاعه ٢٢٥ م قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة

$$ف(ن) = ۲۵ - ۳۰$$

- ١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم عن قمة البرج وعن سطح الأرض ؟
- ٢- جد الزمن اللازم حتى يصل الجسم إلى الأرض ؟

٣- جد سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض ؟

من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب

$$f(t) = 20t - 5t^2$$

١- جد أقصى إرتفاع يصله الجسم

٢- سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على

إرتفاع ٤٠ م

قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض حسب

$$f(t) = 40t - 5t^2$$

جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية

المقطوعة ١٠٠ م

قاعدة السلسلة

٦

(١) تركيب الإقترانات

$$((s)h)u = (s)(h \circ u) \quad \checkmark$$

$$= (s)^\wedge (h \circ u) \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad u^\wedge h \times ((s)h)^\wedge$$

مثال

إذا كان

$$u(s) = s^3 + s$$

$$h(s) = s^2$$

جد :

$$(h \circ u)^\wedge(s)$$

$$(h \circ u)^\wedge(2)$$

$$(h \circ h)^\wedge(s)$$

إذا كان

$$u(3) = 3, \quad u^\wedge(3) = 5$$

$$h(3) = 2, \quad h^\wedge(3) = 4$$

$$u^\wedge(2) = 1, \quad u(2) = 2$$

جد :

$$(h \circ u)^\wedge(3)$$

$$u(s) = s^2 \times (h \circ u)(s) \quad \text{إذا كان}$$

$$\text{جد ل } (3)^\wedge$$

إذا كان

$$u(s) = s + \frac{1}{s}$$

$$h(s) = s^2 + s$$

أثبت أن :

$$(u \circ h)'(s) = (s^3 + s^2)'(s)$$

جد مشتقة كل من :

$$(1) \quad u(s) = (s^3 + s^2)^6$$

$$(2) \quad u(s) = (s^2 + s^3)^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{جد } u'$$

$$(3) \quad u(s) = (s^2 - \frac{s}{4})^3 \quad \text{جد } u'(2)$$

$$(4) \quad u(s) = \frac{s^4}{(1-s^2)^4} \quad \text{جد } u'(s)$$

(2) مشتقة إقتران مرفوع لقوة

$$u(h(s)) = (h(s))^u$$

فإن

$$u'(h(s)) \cdot h'(s) = u(h(s))^{u-1} \cdot h'(s)$$

(٨) ص = جا^٧ س

(٥) $\frac{d}{ds} (س^٣ + ٤س^٤) = (س)ص$

(٩) ص = (لو^٣ س)

(٦) $\frac{d}{ds} (س^٣ + ٣س) = (س)ص$

(١٠) $\frac{d}{ds} \left(\frac{١+س}{١-س} \right) = (س)ص$ جد ص (٢)

(٧) $\frac{d}{ds} (س^٣ + ٢س + ٦س) = (س)ص$ جد ص (١)

إذا كان

$$u(s) = \sqrt{s^2 + 1}$$

$$u'(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$u''(s) = \frac{1 - s^2}{(s^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\text{جد : } (u \times u')'(s)$$

$$v = 7 - 5s, \quad u = 3s + 8 \quad \text{جد } \frac{dv}{ds}$$

$$v = 5 - 2s, \quad u = \frac{1}{1+s} \quad \text{جد } \frac{dv}{ds}, \quad \text{عند } s = 0$$

(٣) مشتقة السلسلة

$$v \leftarrow u \leftarrow s$$

$$\frac{dv}{ds} \times \frac{du}{ds} = \frac{dv}{du} \leftarrow$$

$$ص = ع^2 + \frac{٦٤}{ع} \text{ وكان}$$

$$ع = س^3 ، س = ٢١ + ٤$$

$$\text{جد ١ بحيث } \frac{ص}{س} = ٩٠$$

$$ص = ٢^٣ + ٢٢ + ٥$$

$$٢ = س^٣ + ٣ \text{ جد } \frac{ص}{س} \text{ عند } ٢ = ٤$$

$$ص = ٧٥ + ٢٧ ، وكانت \frac{ص}{س} = ٢ ، جد$$

$$\frac{ص}{س}$$

$$ص = ظاع ، ع = س^٣ + ٥٥ ، جد \frac{ص}{س}$$

$$v = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2$$

$$e = s^2 + 2s \quad \text{جد} \quad \frac{ds}{ds} \quad \text{عند} \quad s = 1$$

$$v = e^2 + 2e$$

$$\frac{dv}{ds} = 2e + 2 \quad \text{وكان} \quad e = \sqrt{3+2s}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2\pi}{4} \quad \text{جد} \quad \frac{ds}{ds} \quad \text{عند} \quad s = \frac{\pi}{4}$$

$$v = e^2 - \frac{8}{e}$$

$$e = s^2 + \sqrt{s} \quad \text{جد} \quad \frac{ds}{ds} \quad \text{عند} \quad s = 0$$

ملاحظة مهمة جداً :

إذا كانت الإقترانات u, v, h, l
وكانت الإقترانات المثلثية ما بداخلها
ليس s
← نستخدم مشتقة الأب وإبنه

جد مشتقة كل من :

(٥) $u(s) = \text{جا}(s^3)$

(١) $v = s \text{ ظا} \left(\frac{1}{s}\right)$

(٦) $v = \text{قا}(s^5)$

(٢) $v = s^2 \text{ جتا} \left(\frac{1}{s}\right)$

(٧) $v = \text{جتا}^3 s^2$

(٣) $v = \text{جا}^3 s + \text{جا} s^3$

(٨) $v = \text{قا}^3 s + \text{ظنا}^3 s^2$

(٤) $v = s^2 \text{ قا} \left(\frac{\pi}{s}\right)$

$$(٩) \text{ ص} = \text{جنا}^٢ \text{س} + \text{جا}^٣ \frac{\pi}{٢}$$

$$(١١) \text{ ص} = (١ + \text{س}^٣) \text{ص} = ٥ \text{س}^٢ + ٧ \text{س} \text{ جد} \\ (٧) \text{ ص}$$

$$(١٠) \text{ ص} = \text{ص} (\text{س}^٣ + \text{س}^٢) ،$$

$$\begin{aligned} ٤ &= (١) \text{ ص} \\ ٧ &= (٢) \text{ ص} \end{aligned} \text{ وكانت}$$

$$\text{جد} \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ عند س} = ١$$

$$(١٢) \text{ ص} = (١ + \text{س}^٣) \text{ص} = ٢ \text{س}^٢ + ٦ \text{س}^٢ \text{ جد} (٢) \text{ ص}$$

$$(١٣) \text{ ص} = \text{ص} (\text{س}^٣) - \text{ص} (\text{س}^٣) \text{ جد} \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ عند}$$

$$\text{س} = ٢ \text{ علماً أنَّ}$$

$$٢ = (٢) \text{ ص} ، ١ = (٢) \text{ ص} ، ٢ = (٨) \text{ ص}$$

عندما $s = 2$ علماً أن

○

$$-١٢. \quad \left[\frac{3}{2} (4 + 2s) \right]' = (s) \quad \text{جد}$$

$$\frac{8}{2(1 + 2s)} = (s) \quad \text{جد}$$

$$(1)' (h \circ s) \quad \text{جد}$$

$$-١٣. \quad \text{إذا كان } (s-1) = 6s + 8 \quad \text{جد}$$

$$\frac{(7) - (h+7)}{4} \quad \text{جد}$$

$$-١٤. \quad \frac{\frac{3}{4} - (s^2)}{\pi - 6s} \quad \text{جد}$$

$$-٤. \quad \frac{(h^3+1) - (h^3-1)}{10} \quad \text{علمياً}$$

$$2 - (1)' \quad \text{جد}$$

$$-٥. \quad \text{إذا كان } 3 = (2)' \quad \text{جد}$$

$$\frac{(2)' - (s^2)'}{1-s} \quad \text{جد}$$

$$-٦. \quad \text{إذا كان } \frac{3}{s} + \text{ظاس} = \text{ص} \quad \text{أثبت}$$

$$\text{ص} = \text{قاس} \quad \text{أثبت}$$

$$-٧. \quad \text{ص} = \text{جاس} - \frac{1}{3} \text{جاس}^3 \quad \text{أثبت}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس}^3 \quad \text{أثبت}$$

$$-٨. \quad (s-2)^3 = (s) \quad \text{جد}$$

$$(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s^3} \quad \text{جد}$$

$$(2)' (h \circ s) \quad \text{جد}$$

$$(s) = \text{ظاس}^3 \quad \text{جد}$$

$$-٩. \quad \frac{5}{2-3s} = (s) \quad \text{جد}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} \right)' (h \circ s) \quad \text{جد}$$

$$-١٠. \quad \left\{ \begin{array}{l} s^3 + 2s, s \geq 2 \\ s^3, s < 2 \end{array} \right\} = (s) \quad \text{جد}$$

$$\text{وكان } (s) = (s-2)^4 \quad \text{جد}$$

$$(2)' (h \circ s) \quad \text{جد}$$

$$-١١. \quad \text{ص} = \text{لوس}^2 \quad \text{جد}$$

$$\text{جد قيمة } \text{ص} \quad \text{جد}$$

الإشتقاق الضمني

V

ملاحظة مهمة جداً :

مثال

$$ص^2 + 2س = 8 - 4ص \quad \text{جد } \frac{ص}{س}$$

$$س^2 + 2ص = 1 + 4س - 4ص \quad \text{جد } \frac{ص}{س}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2\text{ص}^3 + 4\text{ص} = 6\text{ص}^2 + 18$$

جد $\frac{\text{ص}}{\text{ص}}$ عند $(2, 1)$

$$\text{ظا} + \text{جتا} = 4\text{ص}^2 - 9\text{ص} \quad \text{جد} \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$3\text{ص} = \text{جاس جتا} 2\text{ص}$$

جد $\frac{\text{ص}}{\text{ص}}$

$$\text{ظا}(\text{ص}) = \text{ص}$$

جد $\frac{\text{ص}}{\text{ص}}$ عند $(1, \frac{\pi}{4})$

$$1 = \frac{s}{v} + \frac{1}{s}$$

$$\text{جد } \frac{ds}{ds} = 2 \text{ عند } s = 2$$

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$$(s + v) = s^3 - 3v^2 \text{ عند } v = 5, s < 0$$

نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $s + v = 2$

جد النقط على منحنى العلاقة $\sqrt{s} + \sqrt{v} = 3$ التي يكون عندها المماس موازيا.

$$\text{إذا كان } v = 2 \text{ أثبت أن } \frac{ds}{ds} = \frac{v^2}{s^2} = \frac{2}{5}$$

(٣) $h = h^s + h^{-s} = h^s + h^{-s}$ جد $\frac{ds}{ds}$ عند $(-1, 1)$

(١) اذا كان $h = \frac{3}{s} + \frac{2}{s}$ جد $\frac{ds}{ds}$

(٤) اذا كان $s = \text{ظناص اثبت ص} = -\text{جا}^2 \text{ص}$

(٢) $s^2 = \text{لوري (س ص)}$ ، جد $\frac{ds}{ds}$ عند $(1, h)$

اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى
 $s^2 + v = 5$ من النقطة $(0, 5)$

اكتب معادلة المماس لمنحنى $s^2 + v = 29$ عند
نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم $v = 2s + 1$

إذا كان المستقيم المار بالنقطة $(-2, 0)$ يمس
منحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 5$ عند نقطة / نقط
التماس

جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي
معادلتها $x^2 + y^2 = 5$ عند كل من
نقطتي تقاطعها مع منحنى $x^2 + y^2 = 5$

ملاحظة مهمة جداً :

جد النقط على منحنى $٩س + ٦ص = ٥٢$ و
التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم
 $٩س - ٨ص = ١$

(١) يتحرك جسم حسب $ع = ٢ف = ٣$ احسب تسارع
الجسم عندما تكون السرعة ٢٨ ث

(٢) $ع = ٢ - ١ف = ٣$ جد تسارع الجسم في حالة السكون
اللحظي

تمرین

$$(\text{س}) \left(\frac{\text{ه}}{\text{ه}} + \frac{\text{و}}{\text{و}} \right) \text{م} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

سرعتہ بعد ۲ ثانیۃ تساوی ۲۱/۵.

TV

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٣ ، ١] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٧ ، ٣] يساوي ٥⁻، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٧ ، ١]؟

- (أ) ٢ (ب) ١ (ج) ١⁻ (د) ٢⁻

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، ١⁻) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$ ؟

- (أ) ١⁻ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا ٢س، فما قيمة ق'(س) + ٦ ق(س)؟

- (أ) جتا ٢س (ب) جا ٢س (ج) ٢ جتا ٢س (د) ٢ جا ٢س

٤ إذا كان ق(س) = $\sqrt{١ + ٢س}$ ، وكان ق قابلاً للاشتقاق، فما قيمة ق'(٣)؟

- (أ) ١٦ (ب) ٢٩ (ج) ٤٨ (د) ١٤٤

٥ إذا كان س^٢ - س ص + ص^٣ = ٣، فما قيمة $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (١ ، ١⁻)؟

- (أ) ٢⁻ (ب) ١⁻ (ج) ١ (د) ٢

٦ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{matrix} س^٢ + ٢ ، س \neq ٥ \\ ١٠س ، س = ٥ \end{matrix} \right\}$ ، فما قيمة ق'(٥)؟

- (أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ١٠ (د) غير موجودة

٧ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتر، ن: الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣ م/ث،
فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

الوحدة الأولى : حساب التفاضل

- ٨ إذا كان $ق(س) = \frac{1}{س+1}$ ، $هـ(س) = ظاس$ ، فما قيمة $ق(هـ(س))$ ؟
- أ) $قاس$ ب) $جتاس$ ج) ١ د) $قاس ظاس$
- ٩ إذا كانت $ق(س) = (س+٢)٣$ ، فما قيمة $ق(١)$ ؟
- أ) $\frac{11}{18}$ ب) $\frac{4}{9}$ ج) $\frac{15}{18}$ د) $\frac{1}{2}$
- ١٠ إذا كانت $س = جتاص$ ، $ص \in [٠, \frac{\pi}{2}]$ ، فما قيمة $\frac{دص}{دس}$ ؟
- أ) $\frac{1}{\sqrt{س-1}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{س-1}}$ ج) $\frac{س}{\sqrt{س-1}}$ د) $\frac{س}{\sqrt{س-1}}$
- ١١ إذا كان $ق(هـ(٣)) = ١٥$ ، وكان $ق(س) = س-٢$ ، $هـ(٣) = ٥$ ، فما قيمة $هـ(٣)$ ؟
- أ) ٠ ب) ٥ ، ١ ج) ٢ د) ٣
- ١٢ أي الاقترانات الآتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله ؟
- أ) $ق(س) = [س-٢]$ ب) $ق(س) = |س-٢|$ ج) $ق(س) = \sqrt{س+٢+١}$ د) $ق(س) = [س+٢] - [س]$
- ٢ إذا كان $ق(١) = ٢-٢$ ، $ق(٣) = ٢-٢$ ، $ق(٣) = ٤$ ، جد $هـ(١+٩) - ق(١)$
- ٣ جد متوسط التغير للاقتران $ص = ق(س) = (س+١)هـ(س-٢)$ عندما تتغير $س$ من ٠ إلى ١
- ٤ إذا كان $ق(٢) = ٣$ ، $ق(٢) = ١-$ ، جد $هـ(١-٢+٢س) - ق(٢)$
- ٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال
- أ) $\lim_{س \rightarrow ٠} \frac{هـ(١-٢س)}{ظاس}$ ب) $\lim_{س \rightarrow ٠} \frac{هـ(٢س-٢س)}{س٢}$
- ج) $\lim_{س \rightarrow ٠} \frac{جتاس-٢س}{س٢}$ د) $\lim_{س \rightarrow ٠} \frac{١-جتاس}{س٢}$

٦ إذا كان هـ(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{ق}(\text{س} - ١) , \text{س} \leq ١ \\ \text{ق}(\text{س}) , \text{س} > ١ \end{array} \right\}$ ، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س)

في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٣ جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٠ ، ٣]

٧ إذا كانت نهـا $\frac{\text{ق}(\text{س}) - ٢}{١ - \text{س}} = ٣$ ، ق متصلاً على ح.

جد نهـا $\frac{\text{س}^3 \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{١ - \text{س}}$

٨ يقف أحمد ونزار على سطح بناية، أفلت أحمد كرة من السكون وفق العلاقة ف_١(ن) = ٥ ن^٢ ، وفي اللحظة نفسها، رمى نزار كرة أخرى عمودياً إلى أسفل وفق العلاقة ف_٢(ن) = ١٥ ن + ٥ ن^٢ ، فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض؟
(ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

٩ إذا كان ق(س) = أجاس ، هـ(س) = $\frac{\text{س}^3}{١ + \text{س}^2}$ فجد قيمة أ بحيث (هـ ° ق) $(\frac{\pi}{٢}) = ٠$ ، أ ≠ ٠

١٠ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} [٢ - \text{س} + \text{س}^2] , ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ \frac{٢}{١ + \text{س}} , \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\}$ ،

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

١١ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف = ٢(هـ^٢ - هـ^{٢٠}) ، يبين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ ف عددياً. (ف الإزاحة بالأمتار، ن الزمن بالثواني)

١٢ إذا كان ق(س) = جاس - جتاس ، جد ق $(\frac{\pi}{٤})$.

١٣ جد مجموعة قيم س التي تكون عندها ق(س) = ٠ في كل مما يأتي:

أ ق(س) = (س - ٢)³ (٣ + ٢س) ، س ∈ [٠ ، ٣]

ب ق(س) = جاس (١ + جتاس) ، س ∈ $[\frac{\pi}{٢} , ٠]$

١٤ جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقتارات الآتية:

أ ص = ق (س) = $\frac{س هـ^٢ س}{جاس}$ ، جاس $\neq ٠$

ب ص = ق (س) = $\frac{س ل و س}{جتاس}$ ، حيث $س < ٠$ ، جتاس $\neq ٠$

١٥ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن)$ حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)؟

١٦ جد النقطة / النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق (س) = $س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$
موازيًا للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، $(٢ ، \frac{٥}{٢})$

١٧ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			أجد متوسط التغير جبريا وهندسيا
			استخدم قاعدة لوبيتال في ايجاد المشتقات
			أجد مشتقات الاقتارات واحل مسائل متنوعة عليها
			أجد مشتقة اقتارات ليست كثيرة حدود
			أوظف قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني في ايجاد مشتقة اقتارات

01

تحتوي على جميع تمارين
وأسئلة الكتاب

ورقة عمل + امتحانات محوسبة

02

03

يتوفر الشرح كاملاً من خلال
بطاقة موقع وتد التعليمي



Follow me on instagram

@Samerrashad88



قروب

فوج الابداع السادس 2007

منصة_أوائل_المملكة