الفهـــرس

الدرس الاول: المصفوفة ..... (١-١٢)

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات ..... (١٣-٢٨)

الدرس الثالث: المحددات ..... (٢٩-٤٨)

الدرس الرابع: النظير الضربي للمصفوفة المربعة ..... (٤٩-٦٣)

الدرس الخامس: حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات ..... (٦٤-٧٠)

حديث من القلب الى القلب

- اخواني واخواتي الطلاب ان شاء الله تكون هاي السنة سنة خير عليكم وتحققو اعلى المعدلات وتدخلو التخصصات الي بتتمنوها، ولكن لكل شيء جميل ولكل فرحة تعب وثمن ولكل نصيب مجتهد واتمنى انه ربنا يعطيكم ع قد تعبكم واجتهادكم وأكثر.

- طلابي الاعزاء اعلموا علم اليقين انه هذه الدوسية كافية ووافية باذن الله لحتى تتمكنو من هاي الوحدة بأفضل صورة وحال، وكنت حريص انه تشمل تدريبات واوراق عمل واسئلة الكتاب واسئلة خارجية ووزارية حتى لا يحتاج اي طالب منكم لاي مصدر خارجي، وثقو تماماً انه بعد دراسة هاي الوحدة أنك تكون قادر على حل اي سؤال وزاري باذن الله.

- واعلموا جيداً أني حريص كل الحرص على نجاح كل طالب فيكم مهما كان مستواه، لأنه نجاحكم من نجاحي وان شاء الله تكونو من الناجحين والأوائل وفالكم التوفيق والنجاح باذن المولى عز وجل.

الدرس الأول: المصفوفة

- المصفوفة هي مستطيل يضم مجموعة من الأرقام مرتبة على شكل صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأي حرف نريده.
- تسمى الأرقام التي تكون داخل المصفوفة بالمدخلات.
- يوجد رتبة لكل مصفوفة وتكون عدد الصفوف × عدد الأعمدة على النحو التالي: - أ٣×٢: - هي مصفوفة تتكون من صفين وثلاث أعمدة.
- عدد مدخلات المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة.

مثال (١):

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

جد: (١) رتبة كل مصفوفة.

(٢) جد قيمة أ٢١ ، ب١٢ ، أ٢٣ ، ب٢٢

(٣) جد قيمة $(أ_{١١})^{٢} + (ب_{١١})^{٢}$

مثال (٢):

إذا كانت ب = [٢٥ -١ ٠] ، أ = $\begin{bmatrix} ١ \\ -١٦ \\ ٩ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة $(أ_{٢٢} - \sqrt{ب_{١١}})^{٢}$

مثال (٣):

إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & -١ \\ ٣ & س^{٢} - س & -٨ \end{bmatrix}$ جد ما يلي: -

(١) رتبة المصفوفة.

(٢) قيمة س التي تجعل $ب_{٢٢}$ = صفر

(٣) $ب_{٢٢} - \frac{١}{٤} ب_{٣٢}$

تدريب:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي: -

(١) رتبة المصفوفة أ، ب.

(٢) $أ_{٢٢}$، $أ_{٣٣}$، $ب_{٢٢}$، $ب_{٢٣}$

(٣) مجموع العمود الثاني في المصفوفة أ.

(٤) مجموع العمود الثاني في المصفوفة ب.

مثال (٤):

أكتب المصفوفة أ من الرتبة ٢ × ٣ بحيث: -

$أ_{ر هـ}$ = $\begin{cases} -١ & ، \ ي < هـ \\ ١ & ، \ ي = هـ \\ ٢ & ، \ ي > هـ \end{cases}$

مثال (٥):

أكتب المصفوفة أ $= [أ_{هـ ي}]$ وحيث $أ_{هـ ي} = هـ - ي + ٢$ ، وكانت رتبة المصفوفة أ $= ٣ \times ٢$

تدريب:

إذا كانت ب $= [ب_{هـ ي}]$ حيث أن $ب_{هـ ي} = ٢هـ - ٣ي$

الحل: $ب = \begin{bmatrix} -١ & -٤ & -٧ \\ ١ & -٢ & -٥ \\ ٣ & ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

تدريب:

أكتب المصفوفة س من الرتبة ٣×٣ حيث: - $س_{هـ ي} = \begin{cases} ي^{٢} + هـ^{٢} & ، \quad هـ = ي \\ (ي - هـ)^{٢} & ، \quad هـ \neq ي \end{cases}$

الحل: $س_{٣ \times ٣} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ١ & ٨ & ١ \\ ٤ & ١ & ١٨ \end{bmatrix}$

مثال (٦):

اكتب المصفوفة س $= [س_{هـ ي}]$ والتي من الرتبة ٣×٣ حيث

$س_{هـ ي} = \begin{cases} هـ ي & ، \quad هـ = ي \\ هـ + ي - ٢ & ، \quad هـ \neq ي \end{cases}$

تدريب:

إذا كانت المصفوفة ص من الرتبة ٢ × ٣

فأكتب المصفوفة ص حيث أن $ص_{ي هـ} = \begin{cases} لو_{٢}(ي + هـ) & ، \quad ي = هـ \\ (ي - هـ)^{٢} & ، \quad ي \neq هـ \end{cases}$

الحل: $ص_{٢ \times ٣} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

تدريب:

أكتب المصفوفة س من الرتبة ٤ × ٣ بحيث: - $س_{ن \times م} = \begin{cases} ن^{م} & ، \quad ن > م \\ ١ & ، \quad ن = م \\ م^{ن} & ، \quad ن < م \end{cases}$

الحل: $س_{٣ \times ٤} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٩ \\ ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ١٦ & ٦٤ \end{bmatrix}$

تدريب:

كون المصفوفة أ من الرتبة ٣×٣ بحيث $أ_{ي هـ} = (-١)^{(ي - هـ)}$

الحل: $أ_{٣ \times ٣} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ١ \\ -١ & ١ & -١ \\ ١ & -١ & ١ \end{bmatrix}$

تدريب:

كون المصفوفة أ من الرتبة ٣×٣ بحيث $أ_{ي هـ} = جا((ي - هـ)\pi)$

الحل: $أ_{٣ \times ٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

تدريب:

إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٥ \\ ٤ & -ص & ٦ \\ ٧ & -١ & ص \\ ٢ & ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي: -

(١) رتبة المصفوفة.

(٢) قيمة $س_{٢٣} + س_{٣٢}$

(٣) إذا كان $(س_{٣٣})^{٣} = ٦٤$ ، فما قيمة ص.

تدريب:

في المصفوفة المربعة التي من الرتبة الثالثة أ حيث أن: $ا_{يه} = \frac{١}{٢}|-٣ي + ه|$ ، فأوجد $٢ا_{٢٣} - ٢$.

تدريب:

اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣×٢ حيث: $ا_{يه} = \begin{cases} ٣ه & ، \quad ي < ه \\ -٢ + ي & ، \quad ي = ه \\ ه \times ي & ، \quad ي > ه \end{cases}$

الحل: $أ_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$

أنواع المصفوفات / مصفوفات خاصة

(١) المصفوفة المربعة:

يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٧ & ٩ \end{bmatrix}$

(٢) مصفوفة الوحدة "م":

هي مصفوفة مربعة دائماً، جميع مدخلاتها اصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي تكون عناصره =١ ويرمز لها بالرمز "م".

$$م_{يه} = \begin{cases} ١ & ، ي = ه \\ ٠ & ، ي \neq ه \end{cases}$$

مثال: $م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $م_٣ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) مصفوفة الصفرية "و":

تكون جميع مدخلاتها اصفار ويرمز لها بالرمز "و"وليس بالضرورة أن تكون مربعة.

مثال: $و_{٣×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) مصفوفة الصف:

تتكون من صف واحد ومن الرتبة ١×ن

مثال: $أ = [١ \quad ٢ \quad ٣]$ ← أ من الرتبة ١×٣

(٥) مصفوفة العمود:

تتكون من عمود واحد ومن الرتبة م ×١ .

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ← أ من الرتبة ٣×١

(٦) مصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة بحيث:

$س_{يه} = ٠$ لكل ي ≠ هـ . ⟸ مدخلات القطر مش ضروري تكون واحد، ممكن تكون أي اشي.

مثال: $س = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(٧) مصفوفة المثلثية العلوية:

هي مصفوفة مربعة تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي اصفاراً

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

ملاحظة: المصفوفة القطرية والمثلثية العلوية والوحدة هي مصفوفات مربعة.

مثال:

لديك المصفوفات $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

(١) ما نوع المصفوفة جـ.

(٢) هل ب مصفوفة وحدة

(٣) ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ .

تساوي مصفوفتين:

يوجد شرطين لتساوي المصفوفات:

(١) يكون لهما نفس الرتبة.

(٢) المدخلات المتناظرة متساوية لكل عنصر في المدخلات.

ملاحظة: إذا اختل احد الشروط لا تكون المصفوفتين متساويتين.

مثال:

ضع الرمز المناسب $(=, \neq)$ في المكان المناسب مع ذكر السبب:

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ——— $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ——— $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ——— $[٣ \quad ٢ \quad ١]$

(٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ——— $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ——— $\begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

مثال:

أوجد قيم س، ص، ع، ل إذا علمت أن

$$\begin{bmatrix} ٢ص & ٢١ \\ ٠ & ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س & ٨ \\ ٢س + ع & ٢ص - ل \end{bmatrix}$$

مثال:

إذا كان $\begin{bmatrix} ٥س & س + ع \\ ٧ & ٢س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣٥ \\ ل & س + ص \end{bmatrix}$

أوجد قيم س، ص، ع، ل.

مثال:

إذا كان $\begin{bmatrix} ٣س - ص & -١ \\ ٤ & ص٢ + س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ع + ٢س & -٥ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد كل من س، ص، ع.

مثال:

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٥ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ص + ع & س - ص + ٣ل \\ س + ص & س - ص \end{bmatrix}$$

مثال:

إذا كان $\begin{bmatrix} ٤س & ٣٦ \\ ٣ص - ٩ & ٢س + ٣ \\ ٣ل - ٢م & ١٦ \\ ٤ل + م & ٢ل - ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤س & ٣٦ \\ ٥ص - ٩ & ٢س + ٣ \\ ٣ل - ٢م & ١٦ \\ ٤ل + م & ٢ل - ٧ \end{bmatrix}$

جد قيم س، ص، ل، م.

مثال:

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} - ٣ & ٦ \\ ٢ & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & س^{٢} - ٥س \end{bmatrix}$

جد قيم / قيمة س.

مثال:

إذا كان $\begin{bmatrix} |ص| & ٦- \\ [ل] & ٤ \\ ٣^{ع} & \frac{١}{٨١} \\ لـو_{٣}[س - ١] & لـو_{٣}٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |ص| & ٦- \\ [ل] & ٤ \\ ٣^{ع} & \frac{١}{٨١} \\ لـو_{٣}[س - ١] & لـو_{٣}٨ \end{bmatrix}$

جد قيمة كل من س، ص، ع، ل.

تدريب:

$$\begin{bmatrix} ٣ & ص^{٢} \\ ٥ & \text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \dfrac{لو^{س}}{س^{٢}-١} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ع \end{bmatrix}$$

جد قيمة ص، ع.

تدريب:

إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} س^{٢}-س & ١ \\ ٤ & ١+٢س \end{bmatrix}$ ، وكان أ مصفوفة مربعة ثنائية حيث $أ_{يهـ} = \begin{cases} ي+هـ & ،\ ي \leq هـ \\ (ي)^{هـ} & ،\ ي > هـ \end{cases}$

فأن قيمة س تجعل أ = ب هي:

أ) ٢ ب) -١ جـ) ١ د) ϕ

تدريب:

إذا علمت أن $\begin{bmatrix} س^{٣}+ص^{٣} \\ ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ \\ س+ص \end{bmatrix}$ فإن المقدار $س^{٢}-سص+ص^{٢} = ...$

أ) ٥ ب) -٤ ج) -٥ د) $\frac{١}{٤}$

تدريب:

إذ كان $\begin{bmatrix} س^{٣}-٤س & س^{٢} \\ ٧- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢س \\ ٥ & ٧- \end{bmatrix}$

فجد قيم س التي تحقق المصفوفة

الحل: {٠، ٢}

تدريب:

إذ كانت $\begin{bmatrix} ٢^{ص} + ٢^{-س} \\ ٢^{س} - ٢^{-١-س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} \\ ١٠ \end{bmatrix}$

فجد قيمة س ، ص.

الحل: س = ١ ، ص = ١

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

- جمع وطرح المصفوفات
- ضرب المصفوفة بعدد حقيقي
- حل المعادلات المصفوفية
- ضرب المصفوفات

أولًا: - جمع وطرح المصفوفات: -

عند جمع وطرح المصفوفات يجب أن يتحقق شرطين: (١) لهما نفس الرتبة.

(٢) نجمع المدخلات المتناظرة.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج ما يلي: -

(١) أ + ب (٢) أ – ب (٣) أ – جـ

تدريب:

جد ناتج أ + ب حيث أن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٨ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$: -

ثانياً:- ضرب المصفوفة بعدد حقيقي: -

(١) يجب ضرب العدد في جميع مدخلات المصفوفة.

(٢) المصفوفة الناتجة من نفس الرتبة.

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$، أوجد ١٢ أ ، – أ .

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} -١ & -٩ & ١٠ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٢ & -٣ & ٥ \\ -٥ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} -١ & -٣ & ٤ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$، أثبت أن أ + ٢ب = ٥جـ.

مثـــال:

إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$، أوجد المصفوفة س حيث س = ١٤ أ – ٥ب + ٣جـ.

مثـــال:

إذا كان س $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة المقدار ١٧س + ١٦ص − ١٤ (س + ص).

تدريب:

إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة المقدار:

$$٨٧(أ+ب)-٨٥(ب-جـ)-٨٦(أ+جـ)$$

الجواب: $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$

مثـــال:

إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ص & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ م & ص \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيم س، ص، م.

مثـــال:

إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١- \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤- & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ١- \\ ٦ & ص \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة س، ص.

تدريب:

إذا كانت $\begin{bmatrix} ص & ٥ \\ ٣ & ٣س \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} س^{٢} & ص \\ ٣ & ٤ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٧ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

الحل: - س = ± ١ ، ص = -٢

ع = {٠ ، ١}

تدريب:

أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التي تحقق $س \begin{bmatrix} ٢ & ص \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} + ع \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ع & ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل: - س = ١ ، ع = ١

ص = ٢ ، ل = ٠

مثـــال:

أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التي تحقق $\begin{bmatrix} س & ع \\ ص & ل \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ع & ٢ص \\ ٣ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص & ل \\ ٨ & ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ل & ١ \\ ١ & س \end{bmatrix}$

مثـــال:

جد ناتج $جتاه \begin{bmatrix} جتاه & جاه \\ -جاه & جتاه \end{bmatrix} + جاه \begin{bmatrix} جاه & -جتاه \\ جتاه & جاه \end{bmatrix}$

تدريب:

أوجد قيم س، ص، ع التي تحقق المعادلة: $٢\begin{bmatrix} س & ٥ص \\ ع & -٢ \end{bmatrix} + ٣\begin{bmatrix} ٨ & س \\ ٣ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦+٢ص & -١ \\ -١٣ & ١٢+ع \end{bmatrix}$

تدريب:

إذا كان: $[س^{٢} \quad ٢س] + [-٦س \quad -٢] = [-٣٦ \quad ٤]$ جد قيم س التي تحقق المعادلة.

مثـــال:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$، جد المقدار $٨(أ٢+ب) - ٥أ - ٥ب + ٢ب^{٢}$

تدريب:

أوجد قيم أ، ب، جـ التي تحقق المساواة $٣\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & ٣ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٦ & أ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤+ب & ٤ \\ ٣ & ٣+جـ \end{bmatrix}$

الحل: - أ = ٤

ب = ٨

$جـ = \frac{١}{٢}$

خصائص جمع المصفوفات:

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ ..... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ ..... (المصفوفة الصّفّرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و ..... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ..... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

تدريب:

إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ جد قيمة المصفوفة س في كل مما يلي:

ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٠ & ٨ & ٧ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

١) س = أ − ٣ب + ٤جـ

٢) س = أ − $\frac{١}{٢}$(ب − جـ)

٣) س = أ − ب + جـ

٤) ٢(ب − س) = ٤(س + جـ) − أ

ثالثاً: - حل المعادلات المصفوفية: -

مثـــال:

حل المعادلة المصفوفية التالية: - $٥\left(\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + س\right) = ٢س + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix}$

مثـــال:

حل المعادلة المصفوفية التالية: - $٣\left(\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} + س\right) = ٢\begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$

مثـــال:

حل المعادلة المصفوفية التالية: - $-٢\left(\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} + س\right) = \frac{١}{٢}(س + ٢)$

تدريب:

إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$، حل المعادلة التالية:

$$ب - ٣(س - أ) = ٢س + جـ$$

الحل: س $= \begin{bmatrix} ٠ & \frac{٢}{٥} \\ \frac{-١}{٥} & ٠ \end{bmatrix}$

تدريب:

حل المعادلة المصفوفية التالية: $-٣\left(٢س - \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\right) = ٢س + ٣م$، (حيث م مصفوفة الوحدة).

الحل: س $= \begin{bmatrix} \frac{٣}{٤} & ٣ \\ ٠ & \frac{٢}{٣} \end{bmatrix}$

تدريب:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\frac{١}{٣}ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ -١٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، جـ $= أ + ب$، حل المعادلة ٢س + ٣ب = أ + جـ

الحل: س $= \begin{bmatrix} ٢ & -٢١ \\ ٤١ & ١٠ \end{bmatrix}$

تدريب:

حل المعادلة المصفوفية: $-٢س + ٣ب = أ + ب$ حيث أ $= \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\frac{١}{٢}جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ $= ب - أ$،

الحل: س $= \begin{bmatrix} -١ & \frac{-٥}{٢} \\ \frac{-٥}{٢} & \frac{٧}{٢} \end{bmatrix}$

مثـــال:

حل المعادلتين المصفوفتين: $٣س + ٤ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٩ & -١٢ \end{bmatrix}$

$-٢س + ٣ص = \begin{bmatrix} ٨ & -٧ \\ -٩ & -٦ \end{bmatrix}$

تدريب:

حل المعادلة المصفوفية التالية: - $٢\left(س + ص^{٢} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + ص + و + س$

الحل: س $= \begin{bmatrix} ٥ & ١٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

تدريب:

إذا كانت: - $٢(س - ص^{٢}) = ٣\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة س

الحل: س $= \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣- & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

رابعاً: - ضرب المصفوفات: -

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فأن حاصل الضرب جـ = أ × ب حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو الآتي:

$$جـ_{يه} = أ_{ي1} \times ب_{1ه} + أ_{ي2} \times ب_{2ه} + \ldots\ldots\ldots + أ_{ين} \times ب_{نه}$$

ملاحظة: لضرب أي مصفوفتين يجب أن تكون: -

عدد أعمدة المصفوفة أ (الأولى) = عدد صفوف المصفوفة ب (الثانية) حيث جـ = أ × ب

مثـــال:

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}، \quad ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}، \quad جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$$ أي من العمليات الآتية مقبولة: -

(١) أ × جـ (٢) أ × ب (٣) ب × جـ

(٤) ب × أ (٥) جـ × ب (٦) جـ × أ

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٥- & ٩ & ٢- \end{bmatrix}$ فجد: (١) أ × جـ (٢) جـ × أ

مثـــال:

إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد أن أمكن: (١) أ × ب (٢) ب × أ

مثـــال:

لتكن أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفة من الرتبة ٥ × ل، فما قيمة كل من ن،ل التي تجعل أ × ب، ب × أ معرفة

مثـــال:

جد ناتج $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \right)$

خصائص عملية ضرب المصفوفات:

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإنّ:

١ (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) ..... الخاصيّة التجميعيّة.

٢ أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

٣ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

٤ أ . م = م . أ = أ ..... (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة: –

(١) أ . ب (٢) أ . جـ

مثـــال:

إذا كانت أ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب = جـ فما رتبة المصفوفة ب في كل مما يلي: –

(١) $أ_{٥\times٢}$ ، $جـ_{٤\times٢}$ (٢) $أ_{٣\times٣}$ ، $جـ_{٥\times٣}$

مثـــال:

جد قيم س، ص بحيث أن: $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

مثـــال:

إذا كان س $= \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}$ وكان س^{٢} $=$ ل س ، جد قيمة الثابت ل

تدريب:

إذا علمت أن $أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة س بحيث أن $أ^{٢} = ٣أ + \frac{٢}{٣}س^{-١}$

الحل: س $= \begin{bmatrix} ١٠ & -٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

تدريب:

إذا كان $س = \begin{bmatrix} ٠ & -ظا\frac{أ}{٢} \\ ظا\frac{أ}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ ، $م = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ بين أن $م + س = (م - س) \begin{bmatrix} جتا أ & -جا أ \\ جا أ & جتا أ \end{bmatrix}$

ملاحظات:

(١) $أ \times ب \neq ب \times أ$ ← (خاصية الضرب ليست تبديلية)

(٢) إذا كان $أ \times ب = أ \times جـ$ ليست بالضرورة أن تكون $ب = جـ$

(٣) إذا كان $أ \times ب = و$ فليس بالضرورة أن تكون $أ = و$ أو $ب = و$

مثـــال:

إذا كان أ، ب مصفوفتان لهما نفس الرتبة، برهن أن $(أ + ب)^{٢} \neq أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$.

تدريبات متنوعة

(١) إذا كانت س، ص مصفوفتان من الرتبة ن بحيث أن $س^{٢} - ص^{٢} = (س + ص)(س - ص)$ فأن واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

أ) س=ص
ب) س، ص أحدهما مصفوفة صفرية
جـ) س ص = ص س
د) س ، ص أحدهما مصفوفة الوحدة

---

(٢) إذا كانت س ، ص مصفوفتان فإن (س + ص) (س - ص) دائمًا تساوي: -

أ) $س^{٢} - ٢س ص - ص^{٢}$
ب) $س^{٢} - س ص + ص س - ص^{٢}$
جـ) $س^{٢} + س ص - ص س - ص^{٢}$
د) $س^{٢} - ص^{٢}$

---

(٣) إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات بحيث تكون عملية الجمع والطرح معرفين وكان ل عدد حقيقي فأن العبارة الصحيحة دائماً هي: -

أ) إذا كان أ × ب = أ × جـ فأن ب = جـ
ب) أ × ب = ب × أ
جـ) ل (أ × ب) = (ل أ) × (ل ب)
د) (أ + ب) × جـ = أ جـ + ب جـ

---

(٤) إذا كانت $س = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ب & أ \end{bmatrix}$ ، $س^{٢} = \begin{bmatrix} هـ & ل \\ ل & هـ \end{bmatrix}$ فأن:

أ) $هـ = أ^{٢} + ب^{٢}$ ، $ل = ٢أب$
ب) $هـ = أ^{٢} + ب^{٢}$ ، $ل = ٢أ^{٢}ب^{٢}$
جـ) $هـ = ٢أب$ ، $ل = أ^{٢} + ب^{٢}$
د) $هـ = أ^{٢} + ب^{٢}$ ، $ل = ٢أب$

---

(٥) إذا كان أ$_{٣\times٢}$ ، ب$_{٢\times٣}$ ، جـ$_{٢\times٢}$ ، أي العمليات الآتية يمكن اجرائها: -

١) أ × ب + جـ ٣) أ × جـ + ب

٢) ب × أ + جـ ٤) ب × جـ + أ

---

(٦) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، فجد: أ^{٢}، أ^{٣}، أ^{٤}، ثم جد أ^{٢٠٠}

---

(٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة بيّن أن:- أ^{٣} - ٣أ^{٢} + ٣أ - ٢ = (أ - ١)^{٣}

الدرس الثالث: المحـــددات

أولًا:- فك المحددة من الرتبة الثانية: -

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = أ_{11} \times أ_{22} - أ_{21} \times أ_{12}$

قيمة المحددة = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فأوجد محددة المصفوفة أ .

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ ، أوجد $|٢أ|$

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد:

١) $|أ|$ ٢) $|ب|$ ٣) $|أ + ب|$ ٤) $|أ| + |ب|$

ملاحظة: المحدد لا يوزع على الجمع والطرح ← $|أ \pm ب| \neq |أ| \pm |ب|$

مثـــال:

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، أوجد:

١) $|س|$ ٢) $|ص|$ ٣) $|س + ص|$ ٤) $|س| \times |ص|$

ملاحظة: المحدد يتوزع فقط على الضرب ← $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

تدريب:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أوجد $|٣أ - ٢ب|$

الجواب: -٩٦

تدريب:

إذا كانت $|أ| = ٥$ ، $|ب| = ٢$ ، فإن $|أ \times ب| =$ .....

قواعـد هامـة: -

(١) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية فأن $|ك أ| = ك^{٢} |أ|$

(٢) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثالثة فإن $|ك أ| = ك^{٣} |أ|$

(٣) بشكل عام: - إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فأن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$

مثـــال:

إذا كانت أ مصفوفة ثنائية وكان |أ| = ٢، فإن |٣أ| يساوي: -

مثـــال:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ن وكان |أ| = ٥ ، |٢أ| = ٤٠، فما هي رتبة المصفوفة

مثـــال:

إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة |٢أ| تساوي.

مثـــال:

إذا كانت س مصفوفة من الرتبة الثانية وكان |٢س| = ٨، فأن |٣س| =

مثـــال:

إذا كانت س مصفوفة من الرتبة ن وكانت المصفوفة س مصفوفة مربعة وكان $|س| = ٩$، وكان $\left|\frac{٢}{٣} س\right| = \frac{١٦}{٩}$

أوجد قيمة ن.

تدريب:

إذا كان $|أ ب| = -١$، وكان $|-٢ ب| = ٧$ ، أوجد محدد أ بحيث أ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية.

الجواب: $|أ| = \frac{-٤}{٧}$

تدريب:

لأي مصفوفتين مربعتان س ، ص من الرتبة الثانية حيث ل ثابت، فأن احدى العبارات صحيحة دائماً: -

أ) $|س + ص| = |س| + |ص|$

ب) $|ل (س \times ص)| = ل^{٢} (|س| \times |ص|)$

جـ) $|س - ص| = |س| - |ص|$

د) $|ل (س + ص)| = ل^{٢} (|س| + |ص|)$

تدريب:

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث

$|أ \times ب| = -٦$ ، $|١٤| - |٢ ب| = -٦٤$ ، أوجد $|أ|$ ، $|ب|$

الجواب: $|أ| = -٣$ ، $|ب| = ٢$

$|أ| = -١$ ، $|ب| = ٦$

تدريب:

إذا كانت ص مصفوفة ثنائية وكان جـ عدد ثابت، |جـص|=٢٧ ، |ص| = ٣ ، فأن جميع قيم جـ الممكنة هي: -

أ) ± ٣ ب) ٢٧ جـ) ٩ د) ٨١

تدريب:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & س \end{bmatrix}$ ، وكان |– ٢أ| = ٢٠ فإن قيمة س هي: -

أ) ٤ ب) ٦,٥ جـ) – ٦,٥ د) – ٤

تدريب:

إذا كان $\begin{bmatrix} ٣- & ٣- \\ ب & ٣- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ب \end{bmatrix}$ ، وهو على الصورة أ×ك=جـ ، فإن |أ| = ...

أ) سالب ب) موجب جـ) لا يمكن معرفتها د) صفر

مثـــال:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثالثة، |أ| = ١٦ ، أوجد |ب| في الحالتين الآتيين: -

أ) إذا كان ب = ٢أ ب) أ = |ب|ب

تدريب:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ س & ص \end{bmatrix}$ ، $|أ| = ٤$، أوجد: -

أ) $|أ^{٢}|$ ب) $\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ص & ٥ \end{vmatrix}$

تدريب:

إذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعة من الرتبة ٢ × ٢ بحيث $|ب أ| = ١٨$ ، $|أ| + |ب| = ١١$ ، $|أ| < |ب|$ ، فإن

$\left|\frac{١}{٢} أ\right|$ يساوي ..... :-

أ) ٧ ب) ٩ جـ) ٢ د) ١

تدريب:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{٣}| = ١٢٥$ فجد قيمة / قيم س.

الحل: س $= \pm ٣$

مثـــال:

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ن & ن+١ \\ ن-١ & ن \end{vmatrix}$

الجواب: ١

مثـــال:

أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{جاه} & \text{جتاه} \\ -\text{جتاه} & \text{جاه} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{قاه} & \text{ظاه} \\ \text{ظاه} & \text{قاه} \end{vmatrix}$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢\text{جاه} \\ \text{جاه} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢\text{جتاه} & ١ \\ ١ & \text{جتاه} \end{vmatrix}$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & -١ \\ ٢ & ٣\text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣\text{س}٦ \\ \text{س} & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix}$

مثـــال:

إذا كان $\begin{vmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٢ & \text{س}+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ أوجد قيمة / قيم س.

مثـــال:

أوجد قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٠ & \text{س}-٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

تدريب:

أوجد قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٢س-١ & ٠ \\ ٤ & س+٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & س^{٢} \\ ١ & -س \end{vmatrix}$

الحل: س = −٢ ، س = ١

تدريب:

إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & -٣س \\ ٥س & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢س+١٢ & -٤ \\ ٤ & س \end{vmatrix}$ ، فأوجد قيمة / قيم س.

الجواب: س = $\frac{-١٨}{١٣}$ ، ٢

مثـــال:

إذا كان $\begin{vmatrix} س & -١ \\ ٢ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٢$، فما قيمة / قيم س.

مثـــال:

قيمة س التي تجعل $س^{٢} + \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} س =$ صفر

مثـــال:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} س & -١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ وكان $\frac{١}{٢}|أ| + |ب| = ٢$ ، فما قيمة س.

تدريب:

إذا كان $ل = \begin{vmatrix} لـو_هـ س & -١ \\ (لـو_هـ س) + ٢ & ١ \end{vmatrix}$ وكان $|ل| = ٣$ أوجد قيمة / قيم س.

الحل: س $= \sqrt{هـ}$

تدريب:

حل المعادلة التالية $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & -ظاس \\ ظاس & ١ \end{vmatrix} = ٣$ ، س $\in [٠ ، ٢\pi]$

الجواب: س $= \left\{ \frac{\pi}{٤} ، \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٥\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤} \right\}$

تدريب:

إذا كان $س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن $|س^{٢} - ص^{٢}|$

الجواب: -٤٣

تدريب:

إذا كان س $= \begin{bmatrix} ن & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٤ & م٥ \\ ١ & ٥- \end{bmatrix}$ جد قيمة م ، ن التي تجعل |س ص| = صفر

الحل: ن = ٩ ، م = ٤

تدريب:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} س^{٢} - ٥س & ٣- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة س بحيث أن |أ| = صفر

الحل: س $= \frac{٥ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

تدريب:

إذا كان س $= \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ جد قيمة |٢س − (س + ص)| .

الحل: صفر

فك المحددة من الرتبة الثالثة ٣ × ٣: -

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

نظام الإشارات مع المدخلات $(-١)^{ي+هـ}$ حيث ي هو رقم الصف، هـ رقم العامود.

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} (-١)^{١+١} & (-١)^{٢+١} & (-١)^{٣+١} \\ (-١)^{١+٢} & (-١)^{٢+٢} & (-١)^{٣+٢} \\ (-١)^{١+٣} & (-١)^{٢+٣} & (-١)^{٣+٣} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤(-١) & ٣(-١) & ٢(-١) \\ ٥(-١) & ٤(-١) & ٣(-١) \\ ٦(-١) & ٥(-١) & ٤(-١) \end{vmatrix} \Leftarrow$$

مثـــال:

جد $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix}$ (١) باستخدام التعريف (٢) بدلالة مدخلات العمود الثاني

مثـــال:

جد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$

مثـــال:

إذا كان $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٤ \\ ٤ & -١ & -٢ \\ ١١ & ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{vmatrix}$ ، جد قيمة س التي تحقق المعادلة.

مثـــال:

$\begin{vmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$ = صـ فر ، أجد قيمة س

تدريب:

حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ٠ & -س^{٢} \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & س^{٢} \end{vmatrix}$ = صـ فر

تدريب:

حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & س \\ س & ١ & ٠ \\ ١ & س+٣ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر

تدريب:

حل المعادلة $\begin{vmatrix} س-١ & ١ & ٠ \\ ١ & س+١ & -١ \\ ١ & ١ & س-٢ \end{vmatrix}$ = صفر

الحل: س = $\pm$ ١ , ٢

تدريب:

$\begin{vmatrix} س & ٠ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ١ & -٤ \end{vmatrix}$ أجد قيمة س.

الحل: س = ١

تدريب:

جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٧ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & س & -٢ \\ ٠ & -١ & ٤ \end{vmatrix}$

الحل: س = ١٠ ,-٢

تدريب:

جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٥ & ٦ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} س & س \\ ٥ & س \end{vmatrix} + ٣٢ =$ صفر

الحل: س $= ١-, ٦$

تدريب:

حل المعادلة $\begin{vmatrix} ١ & \text{جاس} & ٢ \\ \text{جاس} & ١ & \text{جتاس} \\ ٠ & \text{جتاس} & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}$ ، س $\in [\pi, ٠]$

الحل: س $= \frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{\pi ٥}{١٢}$

ملاحظة: إذا كان المحدد على صورة المصفوفة المثلثية العلوية

$\begin{vmatrix} ١١^{أ} & ٢١^{أ} & ٣١^{أ} \\ ٠ & ٢٢^{أ} & ٣٢^{أ} \\ ٠ & ٠ & ٣٣^{أ} \end{vmatrix} = ١١^{أ} \times ٢٢^{أ} \times ٣٣^{أ}$، نضرب عناصر القطر الرئيسي ببعضها.

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{vmatrix} س-١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س-٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-٣ \end{vmatrix}$، فأن $|أ|$ يساوي .....

تدريبات

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: -

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} س-١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س^{٢}+س+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٩$ فأن $س^{٦} =$ .....

أ) ١ ب) ١٠٠٠ جـ) ١٠٠ د) ١٠٠٠٠

---

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} - ٨ =$ صفر

أ) ٢ ب) -٢ جـ) ٣ د) -٣

---

(٣) قيمة المحددة $\begin{vmatrix} جاهـ & ١ & ٢ \\ ٠ & جتاهـ & ١ \\ ٠ & ٠ & جا٢هـ \end{vmatrix} =$ .....

أ) $\frac{١}{٢}جا^{٢}٢هـ$ ب) $جا^{٢}٢هـ$ جـ) $٢جا^{٢}٢هـ$ د) $\frac{١}{٢}جا٢هـ$

---

(٤) إذا كانت المصفوفة $س = \begin{vmatrix} ٥ & ٥أ & أ \\ ٠ & أ & ٥أ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ، وكان $|س^{٢}| = ٢٥$ فأن القيمة الموجبة للعدد أ تساوي .....

أ) ٢٥ ب) ١ جـ) $\frac{١}{٥}$ د) ٥

---

(٥) إذا كان $\begin{vmatrix} ل_{و}^{٢}٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & ل_{و}^{٣}٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & ل_{و}^{٥}س \end{vmatrix} = ٤$ ، فأن قيمة س = ...

أ) ١٦ ب) ٣٢ جـ) ٦٤ د) ١٢٨

خصائص المحددات: -

(١) إذا كانت جميع مدخلات أي صف أو عمود اصفاراً فإن قيمة المحدد = صفر

مثال: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣- \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٠ & \sqrt{٥} \end{vmatrix} =$ صفر

(٢) يمكن أن نخرج عامل مشترك من أي صف أو عمود

مثال: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} \times ٢ = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

ملاحظة: يعد خلاف المصفوفات وكان العامل يسحب من جميع المدخلات.

(٣) عند تبديل أي صف مكان صف آخر، أو أي عمود مكان عمود آخر، نضرب المحدد بـ (-١)

مثال: $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} (-١) = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} (-١) = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$

(٤) إذا اضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صف آخر أو عمود آخر فلا تتغير قيمة المحدد

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦\times٤+٣ & ٥\times٤+٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix}$$

---

(٥) إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أو عامودين في مصفوفة فأن محددها يساوي صفراً.

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

---

(٦) إذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فأن محددها يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

مثال:

$$\begin{vmatrix} ١١^{أ} & ٢١^{أ} & ٣١^{أ} \\ ٠ & ٢٢^{أ} & ٣٢^{أ} \\ ٠ & ٠ & ٣٣^{أ} \end{vmatrix} = أ^{١٢} \text{ فإن } ١١^{أ} \times ٢٢^{أ} \times ٣٣^{أ}$$

مثـــال:

إذا كانت $\begin{vmatrix} أ & ر \\ ب & جـ \end{vmatrix} = ٥$ ، أوجد:

١) $\begin{vmatrix} ٢أ & ٣ر \\ ٢ب & ٣جـ \end{vmatrix}$

٢) $\begin{vmatrix} أ-ر & ٢أ \\ ب-جـ & ٢ب \end{vmatrix}$

٣) $\begin{vmatrix} أ+٢ب & ر+٢جـ \\ أ-٢ب & ر-٢جـ \end{vmatrix}$

تدريب:

إذا كان $\begin{vmatrix} ١٢ & ٢ب \\ جـ & ء \end{vmatrix} = ٦$ ، فأن $\begin{vmatrix} ٣جـ & ٣ء \\ ا & ب \end{vmatrix} = ...$

أ) ٩ ب) ٣ جـ) -٦ د) -٩

مثـــال:

إذا كان $\begin{vmatrix} ا & جـ \\ ب & ل \end{vmatrix} = ٣$ ، فأن قيمة $\begin{vmatrix} ٥ء & جـ + ل \\ ٥ب & ا + ب \end{vmatrix} = ...$

تدريب:

إذا كانت $ا = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ ، وكان $|١٢ا| = ٢٠$ جد كلاً مما يلي: -

١) $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ص \\ ٣ع & ٣ل \end{vmatrix}$ ٢) $\begin{vmatrix} س + ص & ص \\ ل + ع & ل \end{vmatrix}$ ٣) $\begin{vmatrix} ٢س - ٣ع & ٢ص - ٣ل \\ ٣ع & ٣ل \end{vmatrix}$

٤) $\begin{vmatrix} س - ٢ع & ص - ٢ل \\ ٣ع & ٣ل \end{vmatrix}$ ٥) $|ا^{٢}|$ ٦) $|ا^{٤}|$

تدريب:

باستخدام خواص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} ب+جـ & أ & ١ \\ جـ+أ & ب & ١ \\ ب+أ & جـ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر

تدريب:

باستخدام خواص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} ب-جـ & أ & ٢ \\ أ+ب & -جـ & ٢ \\ أ-جـ & ب & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & س^{٢}+١ & س ص \\ ص & س ص & ص^{٢}+١ \end{vmatrix} = ١$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = س+ص^{٢}+ع^{٣}$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} ب جـ & جـ^{٢} & ب^{٢} \\ جـ^{٢} & جـ أ & أ^{٢} \\ ب^{٢} & أ^{٢} & أ ب \end{vmatrix} = أ ب جـ \begin{vmatrix} أ & جـ & ب \\ جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix}$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} ب جـ & أ ب & أ \\ أ جـ & ب^{٢} & ب \\ ب & جـ & ١ \end{vmatrix} = (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ أ & ب^{٢} & ب \\ ب & جـ^{٢} & جـ \end{vmatrix}$

تدريب:

أثبت أن $\begin{vmatrix} أ^{٢} + ١ & أ ب & أ جـ \\ أ ب & ب^{٢} + ١ & ب جـ \\ أ جـ & ب جـ & جـ^{٢} + ١ \end{vmatrix} = أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١$

الدرس الرابع: النظير الضربي للمصفوفة المربعة

تعريـــف:

(١) إذا كان محدد المصفوفة المربعة = صفر فإن المصفوفة تسمى مصفوفة منفردة (ليست لها نظير ضربي).

(٢) إذا كان محدد المصفوفة المربعة ≠ صفر فأن المصفوفة تسمى مصفوفة غير منفردة (لها نظير ضربي)

مثـــال:

المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات الآتية هي: -

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

مثـــال:

احدى الآتية من المصفوفات لها نظير ضربي: -

أ) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١٦ & ٤ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $م_{٢}$ د) و

مثـــال:

جد قيمة / قيم س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة: -

١) $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٣س & ٤ \\ ٢- & ٦ \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} س+١ & ٥ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٤ & س-٢ \end{bmatrix}$

تدريب:

جد قيم س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة

١) $\begin{bmatrix} ٣-س & ١ \\ س & ٢ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ١ & س-١ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ٠ & س+١٩ \end{bmatrix}$

الحل: ١) س = ٢ ٢) س = $\pm$ ٤

٣) س = ٢,-١ ٤) ٠,-١

ملاحظات هامة:

(١) اذا كان أ × ب = ب × أ = م ، فأن أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب أو ب هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

(٢) إذا كانت أ مصفوفة منفردة فأن أ٢ ، أ٣ ، أ٤ ، ..... أيضًا مصفوفات منفردة.

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز أ$^{-١}$ ونكتب (ب = أ$^{-١}$) ويكون أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م

أسئلة الكتـــاب

مثـــال:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \frac{٢-}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{٤-}{٦} & \frac{٥}{٦} \end{bmatrix}$

١) |أ|　　٢) أ.ب　　٣) ب.أ

مثـــال:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix}$ أوجد أ.ب ثم ب.أ

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ فبين فيما إذا كانت ب$=$أ$^{-١}$

مثـــال:

إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، تحقق فيما إذا كان المصفوفة س نظيراً ضربياً أم لا.

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان | أ | $= ٠$

مثـــال:

أي المصفوفات الآتية منفردة وأيهما غير منفردة أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$

مثـــال:

جد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & س+١ \end{bmatrix}$ منفردة.

مثـــال:

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & س & ٨ \\ ٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أجد قيم س.

تدريبـــات

(١) قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١ & س-٣ \end{bmatrix}$ منفردة هي.

الحل: س $= ٤, -١$

(٢) واحدة من المصفوفات الآتية غير منفردة دائماً لجميع قيم س $\in$ ح.

أ) $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ١ & س \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} س & ٩ \\ -١ & س \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} س & ١٢ \\ ٣ & س \end{bmatrix}$

(٣) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$ منفردة، جد قيم س.

الحل: س = -٣ , ٢

---

(٤) جد قيم س التي تجعل $\begin{bmatrix} س & -١ & ٢ \\ ٥ & س & ٥ \\ -١ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة.

الحل: س = $١, \frac{-٥}{٢}$

---

(٥) جد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & س \\ ١ & ٠ & ٥ \\ ٦ & س+٣ & ٢ \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل: س = ١١ , ١

---

(٦) ما قيم س الموجبة التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س-١ & ٤ \\ ٣ & س \end{bmatrix}$ منفردة:

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

---

(٧) ما قيم الثابت ل الموجبة التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ل-٢ & ٣ \\ ٢ & ل-١ \end{bmatrix}$ منفردة:

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

(٨) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{جاس} & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ مصفوفة مفردة، س $\in \left[٠, \frac{٣\pi}{٢} \right]$

أ) $\frac{٧\pi}{٦}$ ب) $\frac{٧\pi}{٣}$ جـ) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{٥\pi}{٦}$

---

(٩) ما قيمة س التي تجعل $\begin{bmatrix} \text{لو}_{١٠} \sqrt{\text{س}^{٥}} & ١٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ منفردة:

أ) $١٠^{٢}$ ب) $١٠^{٤}$ جـ) $١٠^{٦}$ د) $١٠^{٨}$

---

(١٠) قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{س} - ١ & ٣ \\ ٤ & \text{س} - ٢ \end{bmatrix}$ متفردة:

أ) $\{٢ ، -٥\}$ ب) $\{-٢ ، ٥\}$ جـ) $\{١ ، ٦\}$ د) $\{١ ، -٦\}$

---

(١١) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} \text{س} & ١ & ٣ \\ ١ & -١ & ٣ \\ ٤ & \text{س} & ٦ \end{bmatrix}$ مصفوفة مفردة، فإن قيم س =

أ) $٣ ، ٢$ ب) ٢ جـ) $-٣ ، ٢$ د) $-٣ ، ٢$

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة: -

تذكير: - تسمى المصفوفة المربعة (أ) مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة (ب) من نفس الرتبة حيث أن أ × ب = ب × أ = م

فإن المصفوفة (ب) نظيراً ضربياً للمصفوفة (أ) ويرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ وتكتب $ب = أ^{-١}$

ويكون $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = م$

قاعدة إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فأن: -

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times \begin{bmatrix} (١) \text{ تبديل عناصر القطر الرئيسي} \\ (٢) \text{ تغير إشارات القطر الفرعي} \end{bmatrix}$$

باختصار ⟸ أوجد المحدد ⟸ بدل أماكن ⟸ غير إشارات اللي ما تبدلو

مثـــال:

جد النظير الضربي للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ أن أمكن.

مثـــال:

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، جد $س^{-١}$.

مثـــال:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جد $(أ + ب)^{-١}$.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، أوجد $(أ٢)^{-١}$.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أوجد $أ٢^{-١}$.

تدريب:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أوجد $(أ \times ب)^{-١}$.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، أوجد $ب أ^{-١}$.

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{-\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، بين أن $أ^{-١} = أ$.

تدريب:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، اثبت أن $٢جـ^{-١} = أ \times ب$.

قوانيـن هامـة جداً

(١) إذا كان أ×ب = ب×أ = م، حيث أ،ب مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة فأن أ هي النظير الضربي لـ ب والعكس صحيح.

(٢) أ×أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$×أ = م

(٣) |أ×أ$^{-١}$| = |م| = ١

(٤) (أب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$×أ$^{-١}$ (نعكس الترتيب)

(٥) (أبجـ)$^{-١}$ = جـ$^{-١}$×ب$^{-١}$×أ$^{-١}$ (نعكس الترتيب)

(٦) (أ$^{-١}$)$^{-١}$ = أ

(٧) (أ^{٢})$^{-١}$ = (أ$^{-١}$)^{٢}

(٨) م$^{-١}$ = م

(٩) (كأ)$^{-١}$ = $\frac{١}{ك}$أ$^{-١}$

(١٠) |أ$^{-١}$| = $\frac{١}{|أ|}$ ومنه |أ|×|أ$^{-١}$| = ١

ملاحظات:

(١) (أ+ب)$^{-١}$ ≠ أ$^{-١}$+ب$^{-١}$ (٢) (أ−ب)$^{-١}$ ≠ أ$^{-١}$−ب$^{-١}$

ملاحظات:

(١) أ×م = م×أ = أ (٢) م×أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$×م = أ$^{-١}$

(٣) م×م = م^{٢} = م

مثـــال:

- ضع إشارة (✓) أو (✗) أمام كل عبارة مما يلي: -

(١) إذا كانت أ×ب = ب×أ فإن أ هي النظير الضربي لـ ب. ( )

(٢) إذا كانت أ مصفوفة منفردة فأن أ٢ أيضاً منفردة. ( )

(٣) $(أ \times ب)^{-1} = أ^{-1} \times ب^{-1}$ ( )

(٤) $|أ + ب| = |أ| + |ب|$ ( )

(٥) $|أ - ب| = |أ| - |ب|$ ( )

(٦) $(أ + ب)^{-1} = أ^{-1} + ب^{-1}$ ( )

(٧) $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ ( )

(٨) $(أ٢)^{-1} = أ^{-2}$ ( )

(٩) $(\frac{1}{3}أ)^{-1} = أ^{-3}$ ( )

(١٠) $(أ^{-1})^{2} = (أ^{2})^{-1}$ ( )

مثـــال:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & س \end{bmatrix}$ ، أوجد قيم س.

مثـــال:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ص & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & س \\ -٧ & ص \end{bmatrix}$ ، فأن قيمة س ، ص هي .....

مثـــال:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثابتة وكان $|٣أ| = -٩$ ، فأن $|أ^{-١}| =$ .....

تدريب:

أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان $|كأ \times أ^{-١}| = ٩$ ، ك $\ni$ ع ، فأن ك = ...

الجواب: ك = $\pm$ ٣

مثـــال:

(١) إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات بحيث أن أب = $(٢جـ)^{-١}$ ، فأن $\left(\frac{١}{٢}(أب + (٢جـ)^{-١})\right)^{-١}$ =.....

(٢) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فأن $(أ^{-١} \times ب)^{-١}$ = ...

---

(٣) إذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فأن المصفوفة أ = ...

---

(٤) إذا كان $|أ^{-١}| = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة أ .

---

(٥) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$ فما قيم س.

تدريب:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٧- \\ ص & ع \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ل \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، وكان $أب = ٢جـ^{-١}$ أوجد كل من

س، ص، ع، ل.

الحل: س = ٢ ل = ٣ ص = -١ ع = ٤

تدريب:

إذا كانت $أ + ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ - ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أوجد $ب، أ^{-١}$.

الحل: $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ \frac{٥}{٥} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & ٠ \\ \frac{-١}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$

تدريب:

لتكن $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $(أ \times ب)^{-١} = \frac{١}{٧} جـ$.

تدريب:

إذا كان $(أ + ب)^{-١} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة أ .

الحل: $أ = \begin{bmatrix} \frac{١٦}{١٥} & \frac{٤٦}{١٥} \\ \frac{-١٩}{١٠} & \frac{-٢٢}{٥} \end{bmatrix}$

الدرس الخامس: حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

طرق الحل التي سندرسها

النظير الضربي	طريقة كريمر	طريقة جاوس

أولًا: - النظير الضربي: -

هذه النوع يكتفي فقط بحل نظام مكون من معادلتين بمجهولين.

- يجب تحويل المعادلات إلى شكل معادلة مصفوفية على الشكل الآتي أ . ك = جـ، حيث أن: -

أ: - مصفوفة العوامل لكل من س ، ص ك: - مصفوفة المتغيرات س ، ص

جـ: - مصفوفة النواتج (الأرقام اللي بتكون بعد اليساوي)

مثـــال:

حول نظام المعادلات الآتي إلى معادلة مصفوفية: -

٢س + ٣ص = ١٠ ، -٣ س + ٥ ص = ٤

مثـــال:

حول المعادلات الآتية إلى معادلة مصفوفية: -

١) س = ص + ٤ ، ص – س = ٣

٢) ص = ٤ ، $\frac{١}{٢}$ س + ٥ ص =

تدريب:

٣) س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = ٤ – س

٤) ص – س = ٥ ، ٢س + ص = ٨

مثـــال:

حل النظام: ٢س + ص = –١ ، ٤ س + ص = ١ باستخدام طريقة النظير الضربي.

مثـــال:

استخدم طريقة النظير الضربي لحل المعادلات الآتية: ٢س + ص = ١ ، س + ٧ = ٢ص.

مثـــال:

حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي. ٣س = ٥ – ص ، ص = ١ – س.

مثـــال:

حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = س \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$

تدريب:

حل المعادلة المصفوفية الآتية: $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times$ س $= \begin{bmatrix} ٦- & ٤ & ١١ \\ ١٢- & ٦ & ٢٣ \end{bmatrix}$

الحل: س $= \begin{bmatrix} ٠ & ٢- & ١ \\ ٣- & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

ثانياً: - طريقة كريمر: -

هذه الطريقة أسهل من سابقها وستقتصر على حل نظام مكون من معادلتين بمجهولين فقط.

طريقة الحل: -

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$$

حيث أن: -

$\text{أ}_{\text{س}}$: هي المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.

$\text{أ}_{\text{ص}}$: هي المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

مثـــال:

باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي:

٣س + ٥ ص = ١ ، ٢س + ٣ص = ٠

مثـــال:

حل النظام الآتي بطريقة كريمر:

س − ٥ = ٢ ص − ٤ س ، ص + س + ٤ = −٥ + ٣س

مثـــال:

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة س ، ص.

تدريب:

حل المعادلتين الآتيين بطريقة كريمر $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢} = \frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٣}{٢} = \frac{ص}{٢} - \frac{س}{٤}$

الحل: س $= \frac{٢٨-}{٩}$ ، ص $= \frac{١٣-}{٩}$

مثـــال:

حل المعادلات بطريقة كريمر: - $(\text{جتاهـ})\text{س} + (\text{جاهـ})\text{ص} = ١$

$(-\text{جاهـ})\text{س} + (\text{جتاهـ})\text{ص} = ٠$

تدريب:

حل النظام بطريقة كريمر: $\frac{١٢}{\text{س}} - \frac{١٢}{\text{ص}} = ٧$ ، $\frac{٣}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{ص}} = ٠$

الحل: س = ٣ ، ص = -٤

مثـــال:

إذا كانت س + ٢ص=١٢ هي احدى المعادلتين الخطيتين بمتغيرين، وعند استخدام طريقة كريمر وجد أن $|٢أ\text{س}| = ٨ - ٨|أ\text{ص}|$، فما قيمة |أ| حيث |أ| ≠ ٠

مثـــال:

عند استخدام قاعدة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين، احدى هذه المعادلات هي $\text{ص} = -\frac{١}{٢}\text{س}$، وجد أن $|أ\text{س}| + |أ\text{ص}| = ٧$ جد قيمة المحدد أ.

تدريب:

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين س، ص، إذا كان $|أ_س| = |٤| = |\frac{-١}{٣}| = |أ_ص|$ فأوجد قيمة س، ص.

الحل: س = ٤ ، ص = −١٢

ثالثاً: - طريقة جاوس: -

تمكننا هذه الطريقة من حل ثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل بطريقة بسيطة.

- تعتمد هذه الطريقة على اجراء بعض العمليات على الصفوف وأهمها هي: -

١) ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفر ٢) جميع أو طرح أي صفين.

٣) تبديل صف مكان الآخر.

والهدف من هذه العمليات هو تشكيل مصفوفة مثلثية علوية.

مثـــال:

استخدم طريقة جاوس لحل النظام: -

٣س + ٧ص = ١٠ ، ٢س − ٥ص = −٣

مثـــال:

استخدم طريقة جاوس لحل النظام:

س + ص − ع = ٩ ، ص + ٣ع = ٣ ، −س − ٢ع = ٢

مثـــال:

حل النظام بطريقة جاوس:

س + ٢ص = −١ ، س + ٤ ص = ١

مثـــال:

حل المعادلات بطريقة جاوس:

س − ص + ع = ٢ ، ٢س + ص − ع − ٧ = ٠ ، ٥ع − س = ٢

تدريب:

حل المعادلات بطريقة جاوس: −

−٢س + ٣ص − ع = ١ ، س + ٢ص − ع = ٤ ، −٢س − ص + ع = −٣

تدريب:

إذا كان ن(س) = أس^{٢} + بس + جـ وكان ن(١) = ٠ ، ن(٢) = ٥ ، ن(−٣) = ٤٠، باستخدام طريقة جاوس أوجد الثوابت أ، ب، جـ