

الفهرس

الدرس الثاني: الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (٧-١)

الدرس الثالث: القيم القصوى (٢٠-٨)

الدرس الرابع: التقعر ونقاط الانعطاف (٤٠-٢١)

الدرس الخامس: تطبيقات عملية على القيم القصوى (٥٥-٤٠)

حديث من القلب الى القلب

❖ اخواني واخواتي الطلاب ان شاء الله تكون هاي السنة سنة خير عليكم وتحققو اعلى المعدلات وتدخلو التخصصات الي بتتمنوها، ولكن لكل شيء جميل ولكل فرحة تعب وثمان ولكل نصيب مجتهد واتمنى انه ربنا يعطيكم ع قد تعبكم واجتهادكم وأكثر.

❖ طلابي الاعزاء اعلموا علم اليقين انه هذه الدوسية كافية ووافية باذن الله لحتى تتمكنو من هاي الوحدة بأفضل صورة وحال، وكنت حريص انه تشمل تدريبات واوراق عمل واسئلة الكتاب واسئلة خارجية ووزارية حتى لا يحتاج اي طالب منكم لاي مصدر خارجي، وثقو تماماً انه بعد دراسة هاي الوحدة أنك تكون قادر على حل اي سؤال وزاري باذن الله.

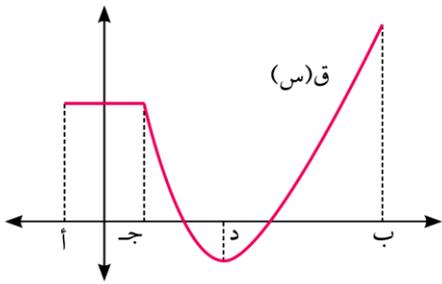
❖ واعلموا جيداً أي حريص كل الحرص على نجاح كل طالب فيكم مهما كان مستواه، لأنه نجاحكم من ناجي وان شاء الله تكونو من الناجحين والأوائل وفالكم التوفيق والنجاح باذن المولى عز وجل.

الدرس الثاني: الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

التزايد والتناقص من الرسم:

إذا كان U (س) معرف على الفترة [أ، ب] فأن:(١) U (س) متزايد على الفترة [أ، ب]إذا كان U (س) $<$ U (س_١)، حيث $س_١ < س_٢$ (أي كلما زادت قيم س زادت قيم U (س)).(٢) U (س) متناقص على الفترة [أ، ب]إذا كان U (س) $>$ U (س_١)، حيث $س_١ < س_٢$ (أي كلما زادت قيم س قلت قيم U (س)).(٢) U (س) ثابتاً على الفترة [أ، ب]إذا كان U (س) = U (س_١)، حيث $س_١ < س_٢$

مثال:



في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران

 U (س) متزايداً أو متناقصاً أو ثابتاً.

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى:

- يتم تحديد التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران u (s) من خلال دراسة إشارة المشتقة الأولى.
- إذا كان u متصلاً على $[a, b]$ وقابل للاشتقاق على $]a, b[$ فإن:
 - يكون u (s) متزايداً على $[a, b]$ إذا كانت $u'(s) > 0$ (صفر لكل $s \in]a, b[$).
 - يكون u (s) متناقصاً على $[a, b]$ إذا كانت $u'(s) < 0$ (صفر لكل $s \in]a, b[$).
 - يكون u (s) ثابتاً على $[a, b]$ إذا كانت $u'(s) = 0$ (صفر لكل $s \in]a, b[$).

قيم s الحرجة

هي القيم التي يكون عندها المشتقة تساوي صفر أو غير موجودة بشرط أن تكون معرفة على المجال.

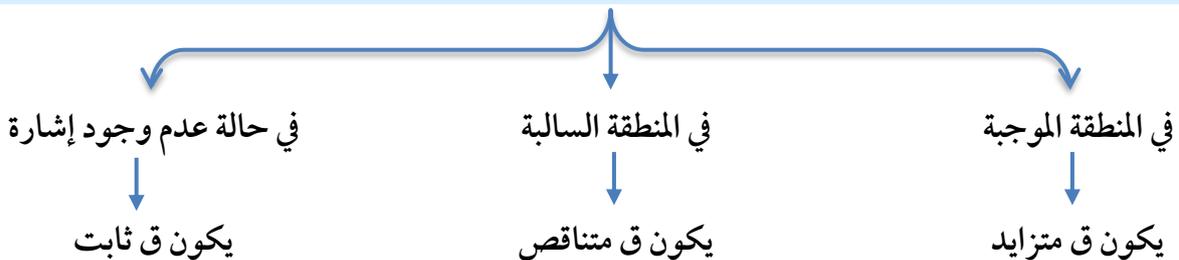
- تكون القيم الحرجة عند:

- (1) اصفار المقام في المشتقة الأولى.
- (2) اصفار البسط في المشتقة الأولى.
- (3) نقاط عدم الاتصال
- (4) نقاط عدم الاشتقاق
- (5) أطراف الفترة.

خطوات إيجاد فترات التزايد والتناقص

- (1) نحدد المجال إذا لم يكن معطى.
- (2) نشتق ونجد قيم s الحرجة.
- (3) نحدد قيم s الحرجة على خط الاعداد وندرس إشارة $u'(s)$.

إشارة $u'(s)$



مثال (١)

جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $u(s)$ علماً أن $u'(s) = (s-1)(s+2)$ ، $s \in \mathbb{R}$.

مثال (٢)

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $u(s) = s^4 + s^3 + 5$ ، $s \in \mathbb{R}$.

مثال (٣)

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $u(s) = \frac{s-1}{s+1}$ ، $s \neq -1$.

مثال (٤)

أثبت أن منحنى الاقتران $u(s) = s^2 + s$ متزايد في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

مثال (٥)

عين فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $u(s) = |s^2 - 4|$ ، $s \in]-3, 2[$.

مثال (٦)

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $u(s) = \sin s$ ، $s \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

مثال (٧)

إذا كان $u(s) = s^3 - 3s^2 + 6s - 5$ ، $s \in]0, 5[$ جد فترات التزايد والتناقص.

مثال (٨)

إذا كان $u = (s)$ ، $\frac{u}{s+1} = s$ ، $s \in]-1, 1[$ جد مجالات التزايد والتناقص.

مثال (٩)

إذا كان $u = (s)'$ ، $0 < u$ ، وكان $h = (s) = s^2 - s^3$ ، أثبت أن h لـ (s) متزايد على الفترة $[0, 3]$ إذا كان $h = (s) = (s) + (s)' + h \times (s)'$.

مثال (١٠)

إذا كان $u = (s)$ ، $h = (s)$ كثيرات حدود معرفان على الفترة $[1, 6]$ ، ويقع منحنى كل منهما في الربع الأول، وكان $u = (s)$ متزايداً على $[1, 6]$ ومتناقصاً في الفترة نفسها. أثبت أن $h = (s) \frac{u}{h}$ متزايد على نفس الفترة.

تدريب:

(١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي:

$$(١) \text{ و (س)} = \sqrt[3]{3s^2 - 3s}$$

$$(٥) \text{ و (س)} = \frac{1-s}{s^2+3}$$

$$(٢) \text{ و (س)} = \sqrt[3]{2s - s}$$

$$(٦) \text{ و (س)} = (3 - 2s)^s \text{ هـ ، س} \in \mathbb{R}$$

$$(٣) \text{ و (س)} = s + \frac{1}{s} \text{ ، س} \neq 0$$

$$(٧) \text{ و (س)} = |1-s| (2+s) \text{ ، س} \in \mathbb{R}$$

$$(٤) \text{ و (س)} = \text{جاس} \text{ ، س} \in]0, \pi[$$

$$(٨) \text{ و (س)} = \text{جاس} \text{ ، س} \in]0, \pi[$$

سؤال (١)

إذا كان q ، h كثيرات حدود وكان $h'(s) = (s)^2 + (s)^2 + (s)^2 + \dots + (s)^2 + s^2$ ، $\exists s \in]0, \pi[$ فجد فترات التزايد والتناقص لمنحنى h لـ (s) علماً أن $h'(s) = h'(s)$ ، $h'(s) = (s)^2 - (s)^2$.

سؤال (٢)

إذا كان $h'(s)$ كثير حدود من الدرجة الخامسة جد أكبر عدد ممكن من القيم الحرجة للاقتزان $h'(s)$ ، $h'(s)$ على الفترة $[أ، ب]$.

سؤال (٣)

إذا كان $h'(s) = s^2 + s + (s+1)$ ، $s < 1$ ، أثبت أن منحنى $h'(s)$ متزايد على مجاله.

سؤال (٤)

إذا كان $h'(s) = s^2 + s + s^2 + s^3$ ، وكان له نقطة حرجة واحدة عند $s = 0$ ، جد قيمة الثابتين $أ$ ، $ب$.

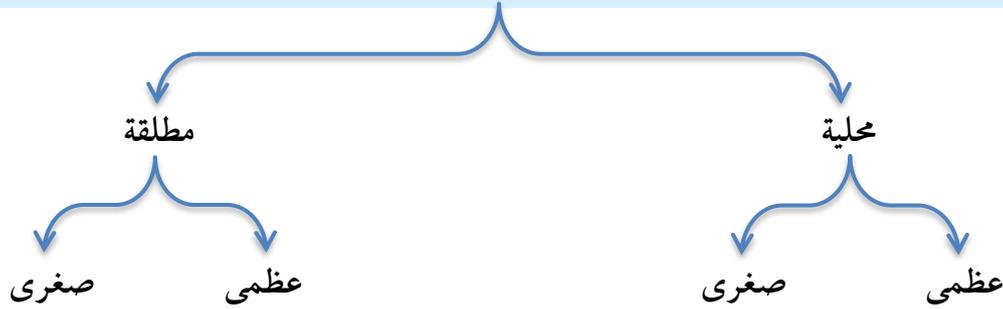
سؤال (٥)

إذا كان $h'(s) = s^2 + s + s^2 + s^3$ ، وكان للاقتزان قيمة حرجة عند $s = 1$ ، وكان $h'(0) = 6$ جد كل من $أ$ ، $ب$ ، $ج$.

الدرس الثالث: القيم القصوى

- هي القيم العظمى والصغرى وتكون دائماً عند القيم الحرجة.
- كل قيمة قصوى يوجد عندها قيمة حرجة وليس كل قيمة حرجة عندها قيمة قصوى.

القيم القصوى



- القيمة العظمى المحلية: هي أكبر قيمة في محيطها.
- القيمة الصغرى المحلية: هي أصغر قيمة في محيطها.
- القيمة العظمى المطلقة: هي أكبر قيمة للاقتان.
- القيمة الصغرى المطلقة: هي أصغر قيمة للاقتان.

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن Q (س) اقتراناً معرفاً على المجال E ، ولتكن $ج$ $\exists E$ ، عندها يكون للاقتان Q (س):

(١) قيمة عظمى محلية عند $س = ج$ هي $Q(ج)$ إذا وجدت فترة مفتوحة $(ف)$ تحوي $ج$ ، بحيث أن

$$Q(ج) \leq Q(س) \text{ لجميع قيم } س \in (ف \cap E)$$

(٢) قيمة صغرى محلية عند $س = ج$ هي $Q(ج)$ إذا وجدت فترة مفتوحة $(ف)$ تحوي $ج$ ، بحيث أن

$$Q(ج) \geq Q(س) \text{ لجميع قيم } س \in (ف \cap E)$$

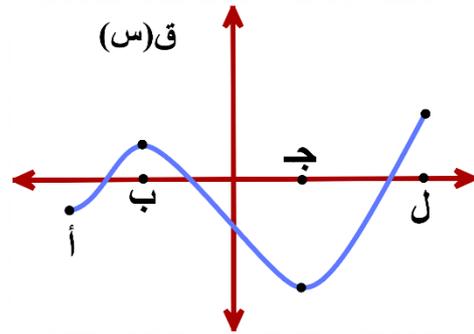
(٣) قيمة عظمى مطلقة عند $س = ج$ هي $Q(ج)$ إذا كانت $Q(ج) \leq Q(س)$ لجميع قيم $س \in E$

(٤) قيمة صغرى مطلقة عند $س = ج$ هي $Q(ج)$ إذا كانت $Q(ج) \geq Q(س)$ لجميع قيم $س \in E$

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

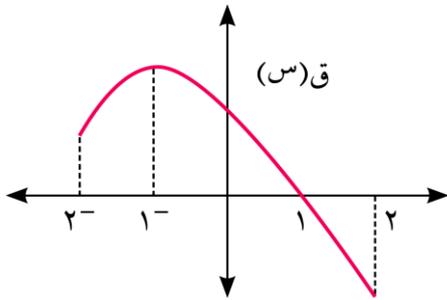
مثال (١)

يمثل الشكل المجاور منحنى u (س) المعروف على A ،
 لجد القيم القصوى المحلية والمطلقة عند كل نقطة،
 ثم جد المشتقة عند كل نقطة.

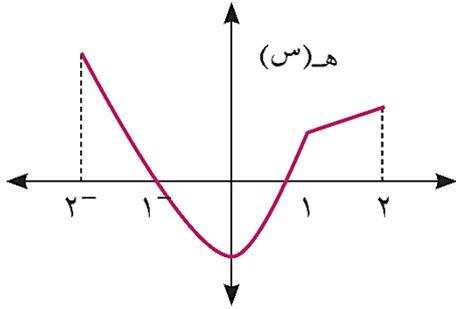


مثال (٢)

يمثل الشكل المجاور منحنى u (س) المعروف على
 الفترة $[-2, 2]$ ، جد القيم القصوى المحلية والمطلقة
 والمشتقة عند كل نقطة.



مثال (٣)



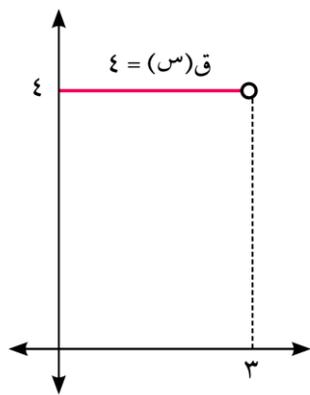
الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$

(١) يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ والسبب.....

(٢) عند $x = 0$ يوجد قيمة محلية والسبب.....

(٣) $f(-2) = \dots$ ، $f(0) = \dots$ ، $f(2) = \dots$

مثال (٤)



إذا كان $f(x) = 4$ ، $\exists x \in]-3, 0]$

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$.

النقط الحرجة:

تسمى النقطة (أ، ق) ((أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

$$(1) \text{ أ} \exists \text{ مجال ق(س)}$$

$$(2) \text{ ق(أ) = 0 أو ق(أ) غير موجودة.}$$

مثال (1)

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s > 1 \\ 3 - s^2 \end{array} \right\} = (s) \cup [3, 1] \text{ عين جميع النقط الحرجة للاقتران في الفترة } [3, 1]$$

مثال (2)

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s \geq 1 \\ 3 \geq s > 2 \\ [s + 3] \end{array} \right\} = (s) \cup [3, 1] \text{ عين جميع النقط الحرجة للاقتران } (s) \cup [3, 1]$$

مثال (٣)

جد قيم s الحرجة للاقتزان $u(s) = \sqrt{6s - s^2}$.

تدريب:

جد النقط الحرجة للاقتزان $u(s) = \sqrt{9 - s^2}$.

الحل: $\{3, -3\}$

مثال (٤)

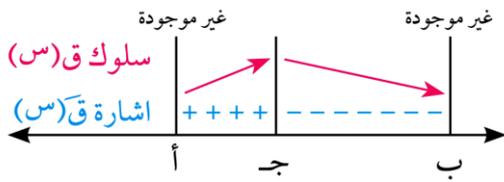
جد قيم s الحرجة للاقتزان $u(s) = \sqrt{3 - s^2}$.

تدريب:

جد النقط الحرجة للاقتزان $u(s) = \sqrt{3 - s^2}$.

الحل: $\{1, -1, 0\}$ صفر

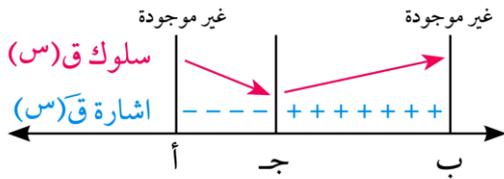
اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى:



إذا كان $Q(S)$ اقتراناً متصلًا في الفترة $[أ، ب]$ وكانت $(ج، ق(ج))$ نقطة حرجة للاقتران $Q(S)$ ، $ج \in [أ، ب]$ فإنه:

(١) إذا كان $Q(S) < ٠$ عندما $أ > س > ج$ ، وكان $Q(S) > ٠$

عندما $ج > س > ب$ فإن $Q(ج)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $Q(S)$



(٢) إذا كان $Q(S) > ٠$ عندما $أ > س > ج$ ، وكان $Q(S) < ٠$

عندما $ج > س > ب$ فإن $Q(ج)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $Q(S)$

مثال (١)

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $٧(S) = ٣س + ٢س - ٥س - ٥$.

مثال (٢)

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $٧(S) = (س - ٨) \sqrt{س}$.

مثال (٣)

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $u(s) = \frac{s^2 + 3}{1-s}$ ، $s \neq 1$.

مثال (٤)

جد القيم القصوى مبيناً نوعها.

$$u(s) = \begin{cases} s^2 - 1 & s < 2 \\ s - 5 & s \geq 2 \end{cases}$$

مثال (٥)

جد القيم القصوى للاقتران $u(s) = s + \frac{1}{s}$.

اختبار أطراف الفترة:

إذا كان Q (س) اقتراناً متصلًا في $[أ، ب]$ وقابلًا للاشتقاق في $[أ، ب]$ فإن:

- (١) Q (أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت $Q'(س) < ٠$ عندما $س < أ$ (بداية تزايد)
- (٢) Q (أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت $Q'(س) > ٠$ عندما $س < أ$ (بداية تناقص)
- (٣) Q (ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت $Q'(س) < ٠$ عندما $س > ب$ (نهاية تزايد)
- (٤) Q (ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت $Q'(س) > ٠$ عندما $س > ب$ (نهاية تناقص)

مثال (٦)

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \geq س \geq ١-٤ \\ ٣ > س > ٢، ٤ \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان}$$

(٢) جد قيم القصوى

(١) جد قيم $س$ الحرجة

مثال (٧)

إذا كان $Q(س) = ٢س^٢ - ٢س + ٥$ ، $٠ \leq س \leq ٥$ جد القيم القصوى مبيناً نوعها.

مثال (٨)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - 6 \geq \text{س} > 1 \\ \frac{1}{2} = \text{س} \end{array} \right\} = \text{س} \text{ إذا كان } \text{س} \text{ جد القيم القصوى المحلية للاقتران } \text{س} \text{ (س).}$$

ملاحظة: إذا كان $\text{س} \text{ (س)}$ اقتراناً متصلاً على $[أ، ب]$ فإن $\text{س} \text{ (س)}$ يتخذ قيم قصوى مطلقة في الفترة $[أ، ب]$.

ملاحظة: إذا كان $\text{س} \text{ (س)}$ متصلاً على فترة في مجاله وكان له قيمة مطلقة وحيدة فأنها مطلقة ايضاً في تلك الفترة.

مثال (٩)

$$\text{س} \text{ (س)} = \sqrt{\text{س} - 4} \text{ ، } \text{س} \in [-2، 2].$$

مثال (١٠)

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران $u(s) = \sqrt{9-s^2}$ ، $s \in]-3, 3[$.

مثال (١١)

$u(s) = \cos s$ ، $s \in]0, \pi[$ جد.

(١) قيم s الحرجة

(٢) فترات التزايد والتناقص.

(٣) القيم القصوى مبيناً نوعها.

مثال (١٢)

جد قيمة A ، B التي تجعل للاقتران $u(s) = s^3 + 3s^2 + Bs$ نقطتين حرجتين عند

$$s = -1, s = 2.$$

مثال (١٣)

إذا كان $U(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 1$ ، وكان للاقتران قيمة عظمة محلية عند $s = -1$ وقيمتها ٢
وقيمة صغرى محلية عند $s = 1$ وقيمتها -1 ، جد الثوابت جميعها.

مثال (١٤)

إذا كان لمنحنى الاقتران $U(s) = 2s^3 + s^2$ قيمة صغرى محلية عند $s = 1$ ، جد قيمة أ.

مثال (١٥)

أثبت أن $U(s) = s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 30$ موجب دائماً.

مثال (١٦)

إذا كان $U(s) = s^4 - 3s^2 - 29$ اثبت أن $U(s)$ سالب لجميع قيم s الحقيقية.

ورقة عمل

س ١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان $U = (س)$ ، $س - |٢ - ٥| = ٥$ ، $س \in [-٢، ٢]$ ، فإن القيمة المطلقة العظمى هي:

- ١ (أ) ١- (ب) ٥- (ج) ٩- (د)

(٢) إذا كان $U = (س)$ ، $\left. \begin{array}{l} ١ \geq س \geq ١٤، س - ٢ \\ ٣ \geq س > ١٤، ١ - س \end{array} \right\} = (س)$ ، فإن مجموعة قيم $س$ التي لها نقطة حرجة في المجال $[٠، ٣٤]$ هي:

- ١ (أ) $\{٠، ١٤، ٣٤\}$ ١- (ب) $\{٠، ٣٤\}$ ١- (ج) $\{٠، ٣٤، ١\}$ ١- (د) $\{١، ١٤، ٣٤، ١\}$

(٣) إذا كان $U = (س)$ ، $س = س + \frac{١}{س}$ ، $٠ < س$ ، فإن العبارة الصحيحة هي:

١ (أ) $U = (س)$ متزايد على $[٠، \infty)$

١- (ب) $U = (١)$ هي القيمة العظمى المطلقة للاقتران $U = (س)$

١- (ج) $U = (س)$ متزايد على $[٠، ١]$

١- (د) $U = (١)$ هي القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $U = (س)$

(٤) إذا كان $U = (س)$ معرفاً على الفترة $[-١، ١]$ وكان $U = (١) = ٢$ ، $U = (س) = ١$ ، فإن:

١ (أ) $U = (١)$ صغرى محلية ١- (ب) $U = (١)$ صغرى مطلقة

١- (ج) $U = (١)$ عظمى محلية ١- (د) $U = (١)$ صغرى محلية

(٥) إذا كان $U = (س)$ ، $س^٢ + ٣س^٢ = ١$ له قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ ، فإن قيمة U هي:

- ١- (أ) ٣- ١- (ب) ٢- ١- (ج) ٣ ١- (د) ٢

(٦) إذا كان $U = (س)$ هـ = $س$ - جاس ، معرفاً على الفترة $[٠, \pi]$ فإن القيمة المطلقة الصغرى هي:

- أ- هـ ب- ١ ج- $\frac{1}{هـ}$ د- ١

(٧) إذا كان للاقتزان $U = (س)$ ، قيمة عظمى محلية عند $(٣, ٢)$ وكان هـ $(س) = (١ - U(س))$ ، فإن للاقتزان هـ $(س)$

:

- أ) قيمة صغرى محلية عند $(٢, -١)$ ب) قيمة عظمى محلية عند $(٢, -١)$
ج) قيمة صغرى محلية عند $(٢, ٨)$ د) قيمة عظمى محلية عند $(٢, ٨)$

س ٢: إذا كان $U = (س) = -٢س^٣ + ٣س^٢ + ٣٦س + ١٠$ ، جد القيم القصوى المحلية مبيناً نوعها.

س ٣: ليكن $U = (س) = -٤س + جاس$ ، $\exists [٠, \pi]$ ، جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية والمطلقة مبيناً نوعها.

س ٤: أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة للاقتزان $U = (س) = جاس - جاس$ ، $\exists [٠, \pi]$.

س ٥: إذا كان $U = (س) = -٢س^٣ + ٣س^٢ + ٦س + ٤$ ، وكان لمنحنى $U = (س)$ قيمة صغرى محلية وأخرى عظمى محلية أحدهما تكون عند $س = -٢$ ، جد.

(١) قيم الثابت أ (٢) قيم الثابت ك إذا كان مجموع القيمتين الصغرى والعظمى -١٢

س ٦: إذا كان $U = (س) = س - هـ$ معرفاً على $[١, -١]$ فجد القيم القصوى المحلية.

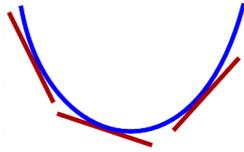
س ٧: إذا كان $U = (س) = (س - ب) + \frac{٢}{٣}ب + ٥$ ، $\neq ١$ صفر وكان للاقتزان $U = (س)$ قيمة قصوى عند النقطة $(٤, ١٠)$ فجد كل من أ، ب.

الدرس الرابع: التقعر ونقاط الانعطاف

إذا كان q اقتراناً متصلاً على الفترة A ، B [وقابلاً للاشتقاق على الفترة] A ، B [فيكون منحنى q :

(١) مقعراً للأسفل على الفترة A ، B [إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران q في الفترة] A ، B].

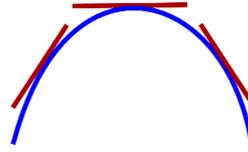
(٢) مقعراً للأعلى على الفترة A ، B [إذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الاقتران q في الفترة] A ، B].



المماسات

تحت المنحنى

مقعراً للأعلى



المماسات

فوق المنحنى

مقعراً للأسفل

* يكون q (س) مقعراً للأعلى على A ، B [إذا كان: $q''(s) < 0$ لكل $s \in A$ ، B]

* يكون q (س) مقعراً للأسفل على A ، B [إذا كان: $q''(s) > 0$ لكل $s \in A$ ، B]

* إذا كان: $q''(s) = 0$ لا يوجد تقعر.

نقطة الانعطاف: $(ج، ق(ج))$ هي نقطة التي يغير الاقتران حولها من طبيعة تقعره بشرط أن يكون عندها الاقتران

متصلاً.

زاوية الانعطاف: هي الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى q مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نقطة الانعطاف.

* يتم إيجاد زاوية الانعطاف من خلال: $\theta = (ج)'$ حيث $0 \leq \theta < 180^\circ$

* إذا كانت $(ج، ق(ج))$ نقطة انعطاف وكان $q''(ج) = 0$ فتسمى النقطة $(ج، ق(ج))$ نقطة انعطاف أفقي.

خطوات إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل:

(١) تحديد المجال. (٢) إيجاد المشتقة الأولى والثانية.

(٣) تحديد:

(أ) أصفار المشتقة الثانية (ب) نقاط عدم الاشتقاق.

(ج) الأطراف.

(٤) وضع القيم الناتجة على خط الأعداد ودراسة إشارة $u''(s)$.

مثال (١)

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $u(s) = 3s^2 - s^3 - 2s + 5$.

مثال (٢)

جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $u(s) = \frac{s^2 + 1}{s}$ ، $s \neq 0$.

مثال (٣)

اثبت أن منحنى الاقتران $u(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \cos t \, dt$ متصلاً للأسفل.

مثال (٤)

جد نقاط الانعطاف للاقتران $u(s) = 3 \cos s$ $s \in [0, \pi]$.

مثال (٥)

بين أنه لا يوجد للاقتران $u(s) = \sqrt{s-9}$ نقطة انعطاف في الفترة $[3, 3]$.

مثال (٦)

إذا كان $U = (s) = s^4 - 2s^3 + s^2$ ، فجد فترات التغير للأعلى والأسفل، ثم جد نقط زوايا الانعطاف (أن وجدت).

مثال (٧)

جد فترات التغير للأعلى والأسفل للاقتران $U = (s)$:

$$\left. \begin{array}{l} s^3 > 0.6 > s \geq 2 \\ s^2 > 2.6 > s > 4 \end{array} \right\}$$

مثال (٨)

جد فترات التغير للأعلى والأسفل للاقتران ونقاط الانعطاف لكل مما يلي:

$$(1) \quad U = (s) = s^2 - 2s^3 + 4s^2.$$

$$(2) \quad U = (s) = s^2 - 7s + 9. \quad (\text{تدريب})$$

$$(3) \quad U = (s) = s^4 - 6s^3 + 2s^2 + 5s - 5. \quad (\text{تدريب})$$

$$(4) \quad U = (s) = 6 - s^4.$$

$$(5) \quad U = (s) = (5 - s^3)^4.$$

مثال (٩)

جد فترات التقعر للأعلى والاسفل للاقتران ونقط الانعطاف لكل مما يلي:

$$(١) \cup (س) = \frac{١}{س} \cdot (٢) \cup (س) = س - \frac{٤}{س}$$

$$(٣) \cup (س) = \left(\frac{١-س}{س}\right)^٢ \cdot (تدريب)$$

مثال (١٠)

جد فترات التقعر للأعلى والاسفل للاقتران ونقط الانعطاف لكل مما يلي:

$$(١) \cup (س) = \sqrt[٢]{١٦س - ٤} - [٤س، ٤] \cdot (تدريب)$$

$$(٢) \cup (س) = \sqrt[٣]{س} \cdot (٣) \cup (س) = س^{\frac{٢}{٣}}$$

مثال (١١)

جد فترات التقعر للأعلى والاسفل لكل مما يلي:

$$(١) \cup (س) = جاس - [٤س، ٢\pi] \cdot [٢\pi، \pi]$$

$$(٢) \cup (س) = جاس - جاس، [٤س، ٢\pi] \cdot [٢\pi، ٠]$$

$$(٣) \cup (س) = ٢جاس + \frac{١}{٢}جاس، [٤س، ٠] \cdot [٢\pi، ٠] \cdot (تدريب)$$

$$(٤) \cup (س) = جاس^س، [٤س، ٠] \cdot [٢\pi، ٠] \cdot (تدريب)$$

$$(٥) \cup (س) = \left. \begin{array}{l} ٢ > س، ١ - ٢ \\ ٢ \leq س، س - ٥ \end{array} \right\}$$

مثال (١٢)

جد زاوية الانعطاف لمنحني $u = f(s)$.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية:

يستخدم هذا الاختبار لتمييز القيم القصوى المحلية للاقتزان بحيث:

(١) نجد $u'(s)$ (٢) نسوي $u'(s)$ بالصفر ونجد قيم s الحرجة من اصفار البسط فقط

(القيم عند المشتقة غير موجودة ما يهموني ابدا بهذا الاختبار)

(٣) نجد $u''(s)$

(٤) نعوض اصفار المشتقة الأولى في المشتقة الثانية:

* الناتج موجب: يوجد قيمة صغرى محلية.

* الناتج سالب: يوجد قيمة عظمى محلية.

* الناتج صفر:

* الناتج غير موجود: يفشل الاختبار ونستخدم اختبار المشتقة الأولى.

نظرية:

إذا كان $u'(s)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي s وكان $u'(s) = 0$ فإن:(١) $u''(s) > 0$ قيمة عظمى محلية، إذا كانت $u'(s) > 0$ (٢) $u''(s) < 0$ قيمة صغرى محلية، إذا كانت $u'(s) < 0$ (٣) يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت $u''(s) = 0$ ، أو $u''(s)$ غير موجودة.

مثال

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $U(s)$ باستخدام اختبار المشتقة الثانية في كل مما يلي.

$$(1) \quad U(s) = s^3 - 3s^2 + 2.$$

$$(2) \quad U(s) = s^3 - 2s + 3.$$

$$(3) \quad U(s) = \text{جاس} - \text{جتاس}، \exists s، \pi 2، 0.$$

$$(4) \quad U(s) = s^4.$$

$$(5) \quad U(s) = |4 - s| - |2 - s| + |1 + s|.$$

$$(6) \quad U(s) = s^2 + \frac{128}{s}، s \neq 0.$$

مثال

إذا كان $U(s)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر بمنحناه بالنقطة $(5, 1)$ ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف $(1, 2)$ هي $v + 3s - 7 = 0$ ، جد قاعدة الاقتران $U(s)$.

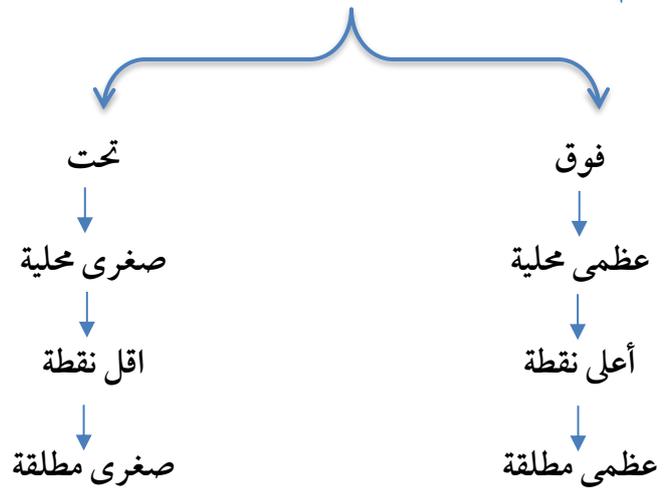
تدريب:

إذا كان $U(s)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر بمنحناه بالنقطة $(2, 0)$ ومعادلة العمودي على المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف $(2, 1)$ هي $2s - v - 3 = 0$ ، جد قاعدة الاقتران $U(s)$.

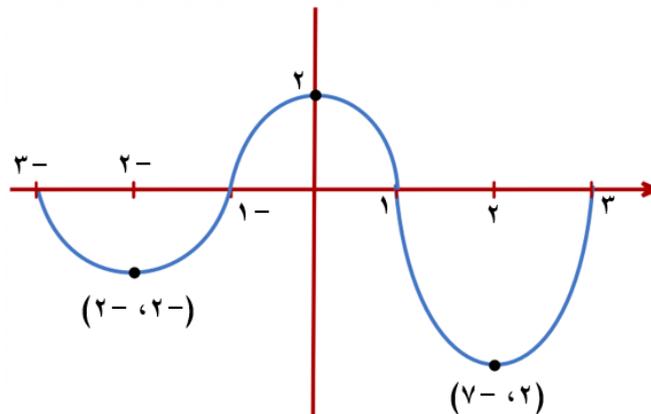
إيجاد واستنتاج الخصائص من الرسم

(١) الحالة الأولى: $U(س)$ إذا جاءت رسمة $U(س)$ وسأل عن خصائص $U(س)$:

- التزايد والتناقص: إذا كان الاقتران صاعد يكون متزايد، وإذا كان الاقتران هابط (نازل) يكون الاقتران متناقص.
- التقعر للأعلى: إذا كان المنحنى فوق المماس.
- التقعر للأسفل: إذا كان المنحنى تحت المماس.
- النقاط الحرجة: عند المماسات الأفقية ونقاط عدم الاتصال والرؤوس المدببة والأطراف والخطوط الأفقية.
- القيم القصوى: كما نراها في الرسمة



مثال

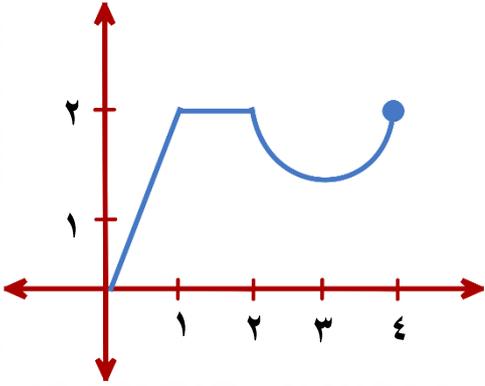
إذا كان الشكل يمثل منحنى $U(س)$ المعروف على $[-3, 3]$ جد ما يلي:

مثال

الشكل التالي يمثل منحنى v (س) بالاعتماد على الشكل أجب عما يليه:

١- معدل تغير الاقتران q في $[٤, ٠]$

٢- v و $(\frac{1}{2})'$ ، v و $(\frac{3}{2})'$ ، v و $(٣)'$



تدريب:

من خلال الشكل التالي الذي يمثل منحنى q (س) أجب عما يلي:

١- قيم s الحرجة.

٢- فترات تزايد وتناقص q (س).

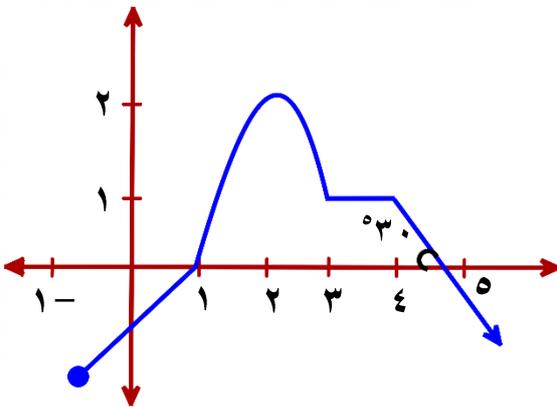
٣- فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى q (س).

٤- القيم العظمى المطلقة.

٥- q و $(١-)$ ' ، q و $(٢)'$

q و $(٣,٥)'$ ، q و $(٩)'$

q و $(١,١)''$ ، q و $(١)''$ ، q و $(٤)'$



(٢) الحالة الثانية: $u'(s)$

إذا جاءت رسمه $u'(s)$ وسأل عن خصائص $q(s)$:

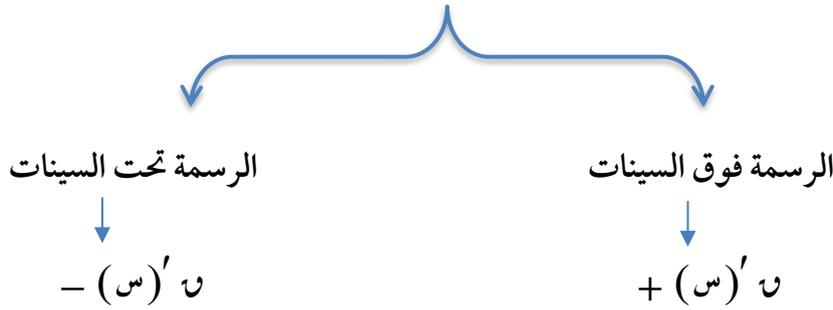
(١) نجد قيم s الحرجة وهي عبارة عن:

- التقاطع مع محور السينات.

- الأطراف

- نقاط الانقطاع في رسمه $u'(s)$.

(٢) نحدد قيم s الحرجة على خط الاعداد وندرس إشارة $u'(s)$



من خلال الترجمة على خط الاعداد نستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتران $q(s)$.

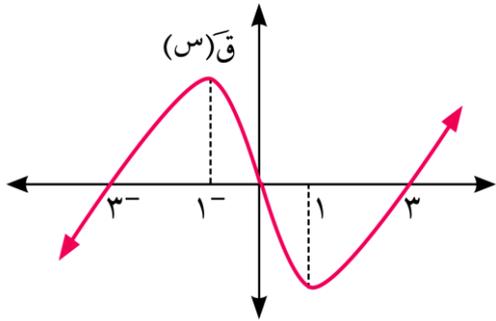
- التقعر للأعلى: إذا كان منحنى u' صاعد (متزايد)

- التقعر للأسفل: إذا كان منحنى u' هابط (متناقص)

- نقاط الانعطاف: عند المماسات الأفقية.

مثال

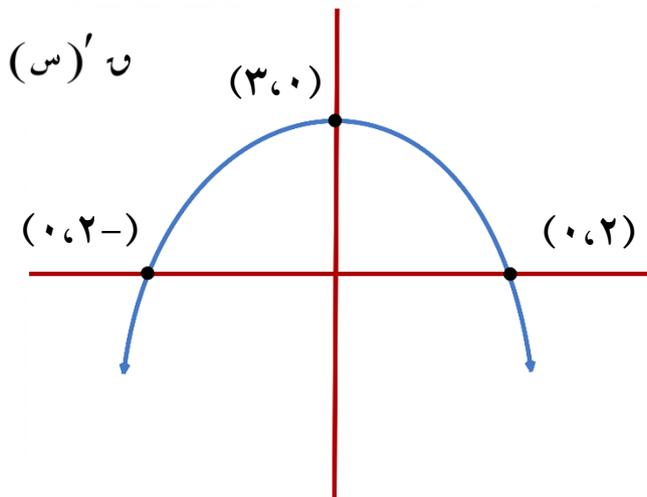
الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $ق(س)$ معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:



- (١) فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$
- (٢) القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$
- (٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $ق(س)$.
- (٤) قيم $س$ التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت).

مثال

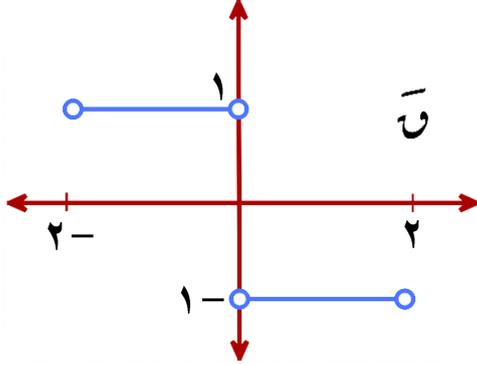
بالاعتماد على منحنى $ق(س)$ ، جد كلاً من:



- (١) قيم $س$ الحرجة
- (٢) فترات التزايد والتناقص.
- (٣) نقاط الانعطاف.
- (٤) فترات التقعر للأعلى والأسفل.

مثال

يمثل الشكل التالي منحنى المشتقة الأولى للاقتراح المتصل على $[-2, 2]$ بالاعتماد على الشكل أجب عما يلي:



(١) قيم s الحرجة لـ $f(x)$.

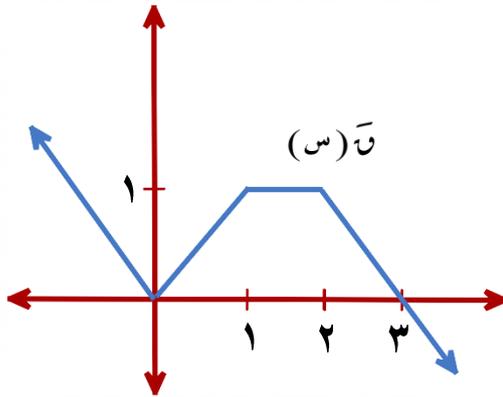
(٢) فترات التزايد والتناقص لـ $f(x)$.

(٣) قيم s التي يكون عندها قيم قصوى محلية.

(٤) فترات التقعر للأعلى والأسفل لـ $f(x)$.

مثال

يمثل الشكل التالي منحنى المشتقة الأولى للاقتراح $f(x)$ المعروف على ح بالاعتماد على الشكل أجب عما يليه:



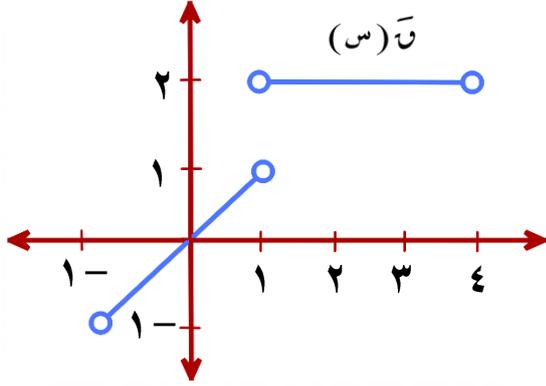
(١) النقاط الحرجة لـ $f(x)$.

(٢) مجالات تزايد وتناقص لـ $f(x)$.

(٣) قيم s التي يكون عندها قيم قصوى محلية.

تدريب:

إذا كان q (س) متصل على الفترة $[-1, 4]$ حيث $q'(s) = \begin{cases} 2s + 5s + 2 & \text{حيث } 1 < s < 4 \\ 1 - 6s & \text{حيث } -1 < s < 1 \end{cases}$ ومثل



منحنى المشتقة الأول للاقتزان q (س) كما يلي:

(١) النقط الحرجة لـ q (س).

(٢) فترات التزايد والتناقص لـ q (س).

(٣) قيم s التي يكون عندها قيم قصوى محلية.

(٤) الثوابت (أ، ب، ج، د، هـ)، $q(1) = 2$ ، $q(4) = 8$.

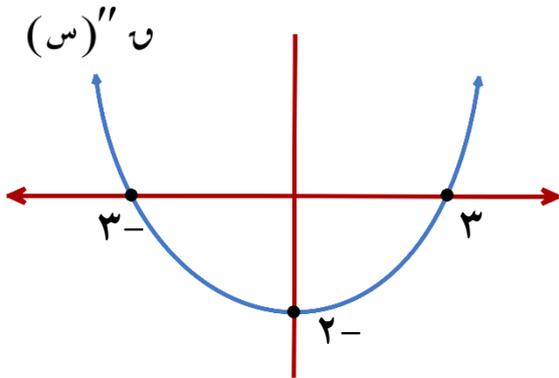
(٣) الحالة الثالثة: $u''(s)$

إذا جاءت رسمة $u''(s)$ وسأل عن خصائص $u(s)$:

- لا يمكن تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران $u(s)$.
- **التقعر للأعلى:** عندما يكون منحنى $u''(s)$ فوق محور السينات.
- **التقعر للأسفل:** عندما يكون منحنى $u''(s)$ تحت محور السينات.
- **نقاط الانعطاف:** هي نقاط التقاطع مع محور السينات.

مثال

بالاعتماد على منحنى الشكل الذي يمثل $u''(s)$ أجب عما يلي:

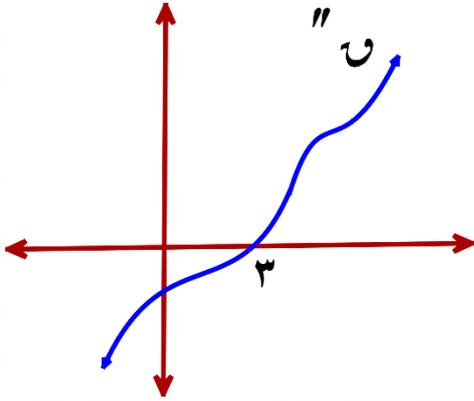


(١) جد فترات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى $u(s)$.

(٢) جد نقاط الانعطاف.

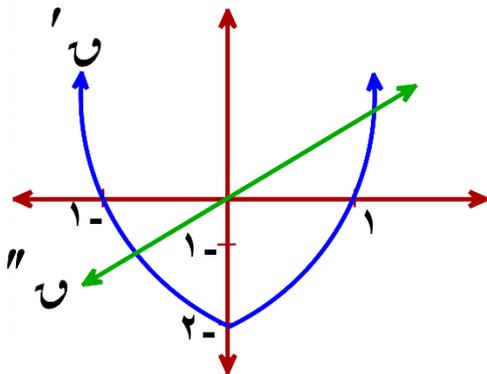
تدريب (1):

يمثل الشكل التالي منحنى $u = (s)$ إذا كان $u = (9)'$ و $u = (2-)'$ ، جد نوع القيم القصوى المحلية للاقتان $u = (s)$.



تدريب (2):

يمثل الشكل التالي منحنى $u = (s)$ ومنحنى $u = (s)'$ للاقتان $u = (s)$ المعروف على ح، اعتمد على ذلك في الإجابة عما يلي:



(أ) عيّن مجالات التزايد والتناقص لـ $u = (s)$.

(ب) عيّن قيم s التي يكون قيم قصوى محلية باستخدام:

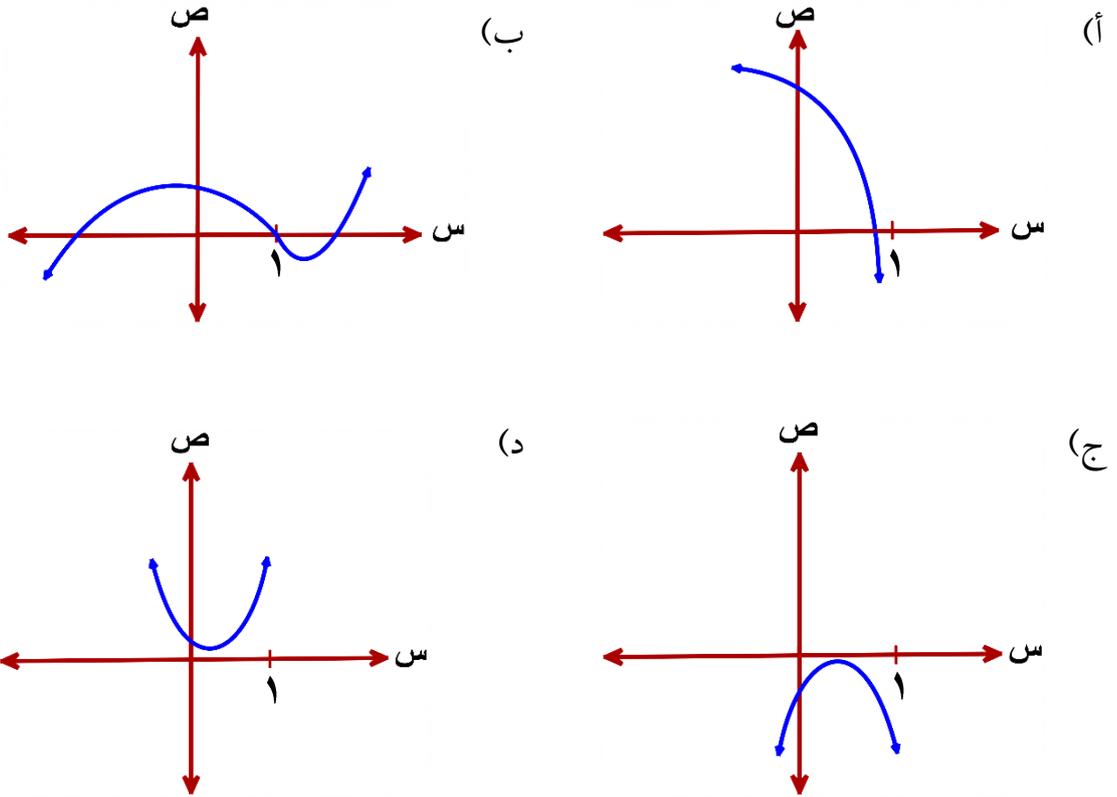
(1) اختبار المشتقة الأولى. (2) اختبار المشتقة الثانية.

(ج) عيّن مجالات التقعر للاقتان $u = (s)$.

(د) عيّن نقط الانعطاف للاقتان $u = (s)$.

تدريب (3):

أي المنحنيات التالية يمثل رسم ق الذي فيه $0 < (0)'$ ، $0 > (1)'$ ، و $0 < (2)'$ سالبة دائماً:



ورقة عمل

س ٢: جد فترات التقعر للأعلى والأسفل ونقط الانعطاف لكل من الاقترانات الآتية:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - > \text{س} \quad 2 \quad (3 + \text{س}) \\ 1 - \leq \text{س} \quad 3 \quad \text{س} - 2 \quad \text{س} \end{array} \right\} = (\text{س}) \cup (1)$$

$$(2) \text{ ل } (\text{س}) = \text{س} + \text{س}^2 - \text{س}^3 + 1$$

$$(3) \text{ ع } (\text{س}) = \text{س} | \text{س} - 2 |$$

$$(4) \text{ و } (\text{س}) = \frac{1 + \text{س}^2}{3 + \text{س}^2}$$

$$(5) \text{ ص } (\text{س}) = (1 - \text{س})^2 (2 - \text{س})$$

$$(6) \text{ و } (\text{س}) = \sqrt[3]{(4 - \text{س})^2}$$

$$(7) \text{ ع } (\text{س}) = \frac{9 + \text{س}^2}{\text{س}} \quad \text{س} \neq 0$$

$$(8) \text{ و } (\text{س}) = (1 - \text{س})^4 + 3$$

$$(9) \text{ ل } (\text{س}) = (4 - \text{س}^2)^2$$

$$(10) \text{ و } (\text{س}) = \text{س}^5 + \text{س}^3 - 5$$

س ٢: اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

(١) إذا كان منحنى \cup (س) مقعرا للأسفل في فترة ما، فإن:

(أ) ل' (س) < ٠ (ب) ل' (س) > ٠ (ج) ل'' (س) < ٠ (د) ل'' (س) > ٠

(٢) للاقتزان $u(s) = s^3 - 3s - 1$ نقطة انعطاف هي:

- (أ) $(-2, -3)$ (ب) $(0, -1)$ (ج) $(1, -3)$ (د) $(-1, 1)$

(٣) إذا كان $u(s) = s^3 - 2s^2 + 4s - 1$ له نقطة انعطاف عند $s = \frac{1}{3}$ ، فإن $\frac{u(s)}{u'(s)}$ يساوي:

- (أ) -2 (ب) -1 (ج) 1 (د) 2

(٤) إذا كان $v = (2s - 1)^3 + 4s$ له نقطة انعطاف عند $s = 5$ ، فإن u تساوي:

- (أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 10

(٥) منحنى $u(s) = (s - 2)^s$ يكون مقعر للأسفل في الفترة:

- (أ) $[-2, 1]$ (ب) $[-1, 2]$ (ج) $[-1, \infty)$ (د) $[\infty, 1]$

(٦) النقطة الحرجة للاقتزان $l(s) = s^3 + 60$ يكون عندها

- (أ) نقطة انعطاف
(ب) نقطة قيمة عظمى محلية
(ج) نقطة قيمة صغرى محلية
(د) $A + B$

(٧) إذا كان $u(s)$ اقتران كثير حدود، $u'(1) = 0$ ، $u''(1) < 0$ ، $u''(2) > 0$ ، فإن النقطة

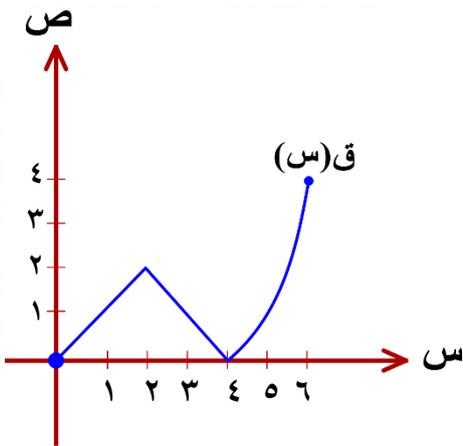
$(1, u(1))$ عندها:

- (أ) قيمة عظمى مطلقة
(ب) قيمة عظمى محلية
(ج) قيمة صغرى محلية
(د) قيمة عظمى مطلقة

س ٣: اثبت أن قياس زاوية الانعطاف لمنحنى $u(s) = \frac{s}{s-1}$ ، هي $\frac{\pi}{4}$.

س ٤: إذا كان منحنى اقتران كثير حدود وله نقطة انعطاف واحدة فأنا أكثر عدد من النقط التي يتقاطع فيها منحنى الاقتران مع أي مستقيم هو؟

س ٥: أوجد قيمة a ، b بحيث يكون لمنحنى $s^2 + as + b = 0$ ، نقطة انعطاف عند النقطة $(1, -1)$.



س ٦: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يُمثل منحنى الاقتران $q(s)$ ،

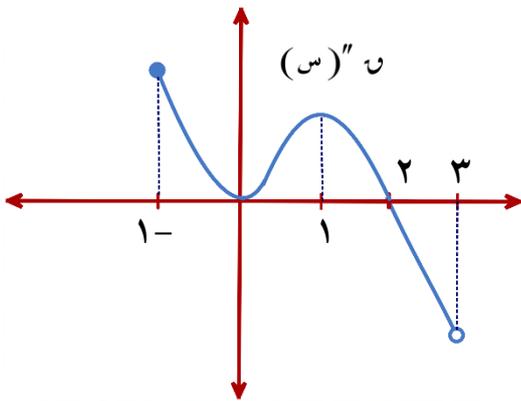
ن $s \in [6, 0]$ ، جد ما يأتي:

(١) النقط الحرجة للاقتران $q(s)$

(٢) مجموعة قيم s التي تكون عندها $q'(s) > 0$

(٣) متوسط تغير الاقتران $q(s)$ في الفترة $[2, 6]$

$$(4) \int_{s=3}^s \sqrt{\frac{s}{s-3}} ds$$



س ٧: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $u''(s)$ أجب عما يلي:

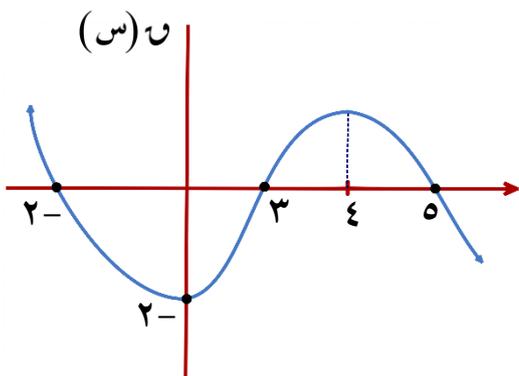
(١) مجموعة قيم s التي تغير الاقتران q اتجاه تقعره حولها هي؟

(٢) الفترة التي يكون فيها q مقعراً للأسفل هي؟

س ٨: يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $u(s)$ حيث انه كثير حدود،

فما هي الفترة التي يكون فيها كل من

$u(s)$ ، $u'(s)$ ، $u''(s)$ لهم نفس الإشارة.



الدرس الخامس: تطبيقات عملية على القيم القصوى

مقدمة:

* في معظم مشكلات الحياة العملية التي تصاغ في قالب رياضي يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما مثل الحصول على أكبر ربح أو أكبر مساحة أو أقل تكلفة أو أقل حجم.... الخ، ولا شك فإن حساب التفاضل يعطي لنا أسلوباً ناجحاً لحل مثل هذه المشكلات.

خطوات حل أي مسألة:

- ١) تحديد عبارة أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن على ماذا تعود فتكون هي العلاقة المطلوب إيجادها والتعامل معها.
- ٢) تحديد الثوابت والمتغيرات. لرموز والربط بينهما بالعلاقة المطلوبة.
- ٣) جعل العلاقة بمتغير واحد من خلال علاقة مساعدة يتم اجباري ذكرها في السؤال.
- ٤) الرسم التوضيحي إذا أمكن أو لزم الامر.
- ٥) إيجاد المشتقة الأولى ومساواتها بالصفر وإيجاد اصفار المشتقة (القيم الحرجة زي ما تعلمنها من قبل).
- ٦) اختبار هذه الاصفار (القيم الحرجة) من حيث انها عظمى أو صغرى حسب اختبار المشتقة الأولى والثانية.

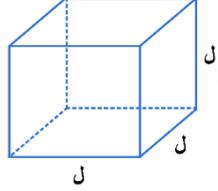
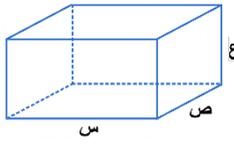
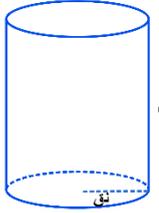
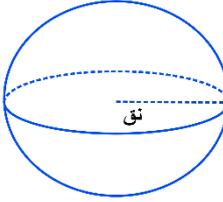
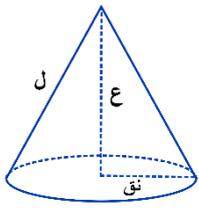
ملاحظة:

كلمة أكبر ما يمكن ← قيمة عظمى

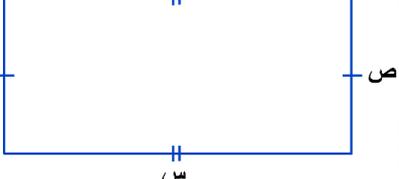
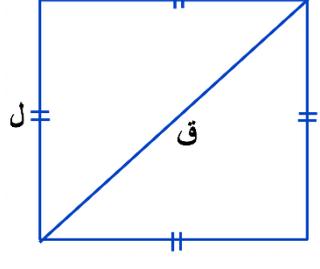
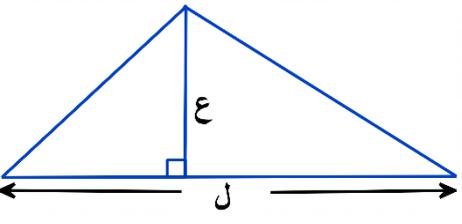
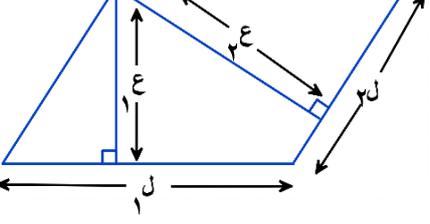
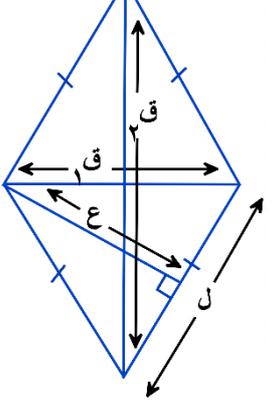
كلمة أصغر ما يمكن ← قيمة صغرى

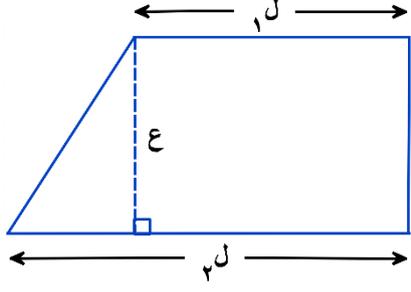
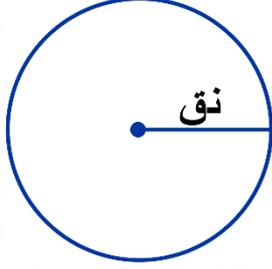
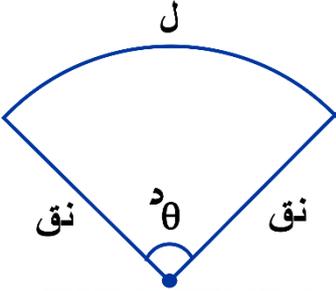
القوانين

الحجوم والمساحات الكلية والجانبية لبعض المعجسات:

الحجم	المساحة الكلية	المساحة الجانبية	المعجم
$ل^3$	$6ل^2$	$4ل^2$	 <p>المكعب</p>
$ع \times ص \times س$	$2(عص + عس + صس)$	$2(ع(ص + س))$	 <p>متوازي المستطيلات</p>
$ع^2 \pi ر$	$2\pi ر^2 + 2\pi ر ع = 2\pi ر(ر + ع)$	$ع \pi ر$	 <p>الأسطوانة الدائرية القائمة</p>
$\frac{4}{3} \pi ر^3$	$4\pi ر^2$	 <p>الكرة</p>
$\frac{1}{3} \pi ر^2 ع$	$\pi ر^2 + \pi ر ل$	$\pi ر ل$	 <p>المخروط القائم</p>

مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية:

<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $2(س + ص)$ • المساحة = $س \times ص$ 		<p>المستطيل</p>
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $4ل$ • المساحة = $ل^2 = \frac{1}{2}ل \times ل$ 		<p>المربع</p>
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة • المساحة = $\frac{1}{2}ل \times ع$ = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين \times جيب الزاوية المحصورة بينهما. 		<p>المثلث</p>
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $2(ل_1 + ل_2)$ • المساحة = $ل_1 \times ع_1 = ل_2 \times ع_2$ 		<p>متوازي الاضلاع</p>
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $4ل$ • المساحة = $ل \times ع = \frac{1}{2}ل_1 \times ع_1 \times 2$ 		<p>المعين</p>

<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = مجموع أطوال أضلاع الأربعة • المساحة = $\frac{1}{2} (l_1 + l_2) \times e$ 		شبه المنحرف
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $2\pi r$ • المساحة = πr^2 		الدائرة
<ul style="list-style-type: none"> • المحيط = $2r + l$ • المساحة = $\frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} \theta r^2$ • حيث $\theta = \frac{l}{r}$ ، $\frac{\theta}{\pi} = \frac{\text{س}^\circ}{180}$ 		القطاع الدائري

سؤال (١)

عددان موجبان مجموعهما ٦٠ جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

سؤال (٢)

جد العددين اللذين مجموعهما ٢٠ ومجموع مربعهما اقل ما يمكن.

العددان: ١٠، ١٠

سؤال (٣)

(الكتاب) مثال (٣): جد أقصر مسافة بين النقطة ل (٠، ٢)، ومنحنى العلاقة $v - s^2 = 8$.

الحل: أقصر مسافة = $\sqrt{10}$ وحدة طول

سؤال (٤)

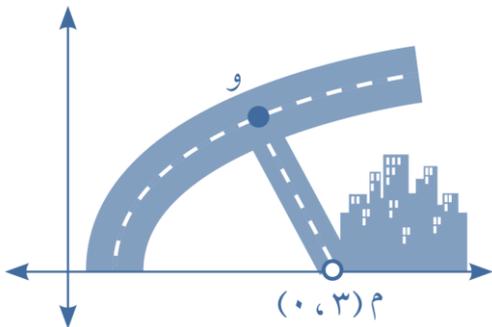
الكتاب ص ٨٧ سؤال رقم (٣): طريق منحنٍ معادلته في المستوى

الديكارتي هي $v = (s) \sqrt{1 - s^2}$ ، النقطة م (٠، ٣) تمثل

موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع

المستشفى (م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (وم) أقل

ما يمكن. (انظر الشكل المجاور).



الجواب: النقطة و = (٢، $\sqrt{3}$)

سؤال (٥)

وزاري ٢٠٠٩: جد أقصر مسافة بين النقطة (٦، ٠)، ومنحنى العلاقة $v - s^2 = 16$

الجواب: ف = $\sqrt{34}$

سؤال (٦)

وزاري ٢٠١٢: جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة $v = 2 - 4s + 23 = \text{صفر}$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (١,٣)

سؤال (٧)

وزاري ٢٠١٤ اكمال: جد أقرب نقطة واقعة على منحنى $v = |s-1|$ إلى النقطة أ (٠,٢)

الجواب: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

سؤال (٨)

كتاب ص ٨٦ مثال (٥): أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^٢



الجواب: اقل محيط = ١٦ سم

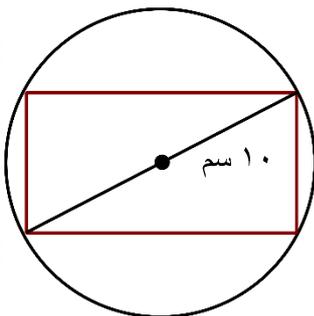
سؤال (٩)

كتاب ص ٨٧ س (١): يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

الجواب: ٤٠٠ م^٢

سؤال (١٠)

وزاري ٢٠٠٧: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها



الجواب: ٢٠٠ سم^٢

سؤال (١١)

وزاري ٢٠١٥: سلك طوله ٥٦ سم قسم إلى جزئين صنع من أحدهما مربع ومن الآخر مستطيل طوله ٣ أمثال عرضه، ما ابعاد المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتهما اقل ما يمكن.

ابعاد المربع: ٦ سم طول الضلع

ابعاد المستطيل: الطول: ١٢ سم، العرض: ٤ سم

سؤال (١٢)

وزاري ٢٠١٧: أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ ب ج د، مكونة من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ متر مربع محاطة بأرصفة عرض كل من الرصيفين أ ب، ج د يساوي ٤ متر وعرض كل من الرصيفين على الضلعين الآخرين ٢ متر، أوجد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض بعد احاطتها بالسور.

الجواب: م = ٣٨٧٢ م^٢

سؤال (١٣)

كتاب ص ٨٧ س (٨): أ ب ج د مستطيل عرضه أ ب = ٨ سم وطوله ب ج = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم، ن نقطة على الضلع ب ج بحيث ل ج = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن.

سؤال (١٤)

وزاري ٢٠٠٧: مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨ سم أوجد أطوال اضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن

ابعاد المربع: أطول أضلاعه ٦، ٦، ٦

سؤال (١٥)

وزاري ٢٠١١ + ٢٠١٩: سلك طوله ١٢ سم ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين أوجد أطوال اضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

سؤال (١٦)

وزاري ٢٠١٦: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب إذا كان طول أب = ٢ سم، وطول ب جـ = ٣ سم، د نقطة على ب جـ، أوجد طول د جـ بحيث يكون مجموع ع طول (د جـ) ومثلي (أ د) أقل ما يمكن.

$$\frac{\sqrt{2-9}}{3} = \text{جـ د} = \text{الجواب}$$

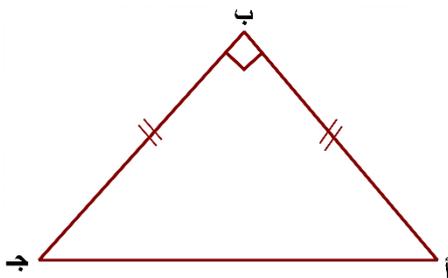
سؤال (١٧)

كتاب ص ٩١ س (١٣): سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتهما أصغر ما يمكن؟

الجواب: طول ضلع المثلث الأول = ٣ سم

طول ضلع المثلث الثاني = ٣ سم

سؤال (١٨)



وزاري ٢٠١٨: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب متساوي الساقين وطول

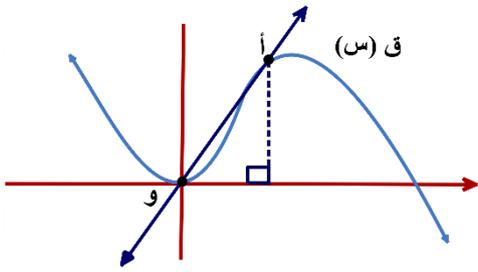
أ ب جـ = ١٢ سم، ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث

بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ ب جـ ويقع الرأسان الأخران على

ضلعي القائمة.

الجواب: م = ١٨ سم ٢

سؤال (١٩)



وزاري ٢٠١٩: تتحرك النقطة (س، ص) على منحنى الاقتران ق (س)

بحيث أن ميل المماس عندها في أي لحظة يساوي ١٢ س - ٢ س ٢، س < ٠، جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب ج، حيث (و) نقطة

الأصل. الجواب: المساحة = $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة

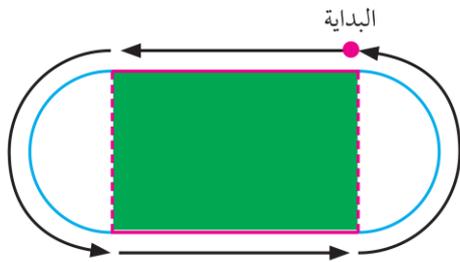
سؤال (٢٠)

وزاري ٢٠١١: جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤، ٣) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثاً

مساحته أصغر ما يمكن.

الجواب: ص = $\frac{4}{3}$ س + ٨

سؤال (٢١)



كتاب ص ٩١ س (١٢): مسار للسباق طوله ٤٠٠ م، يحيط بميدان

على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟

الجواب: العرض = $\frac{200}{\pi}$ م

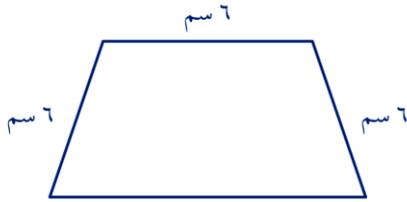
الطول = ١٠٠ م

سؤال (٢٢)

كتاب ص ٨٦ مثال ٤: سلك طوله ٥٦ سم قسم إلى جزأين، نثني أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على

شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتهما أقل ما يمكن؟

سؤال (٢٣)



كتاب ص ٨٧ س (٧): شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف.

الجواب: المساحة = $3\sqrt{3}$ ٢٧

سم ٢

سؤال (٢٤)

وزاري ٢٠١٣: جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان

الأخران على منحنى الاقتران $u(s) = 8 - \frac{2}{3}s^2$

الجواب: $m = \frac{64}{3}$ وحدة مربعة

سؤال (٢٥)

وزاري ٢٠٢٠: أوجد مساحة أكبر شبه منحرف متساوي الساقين يمكن رسمه داخل منحنى الاقتران

$u(s) = \sqrt{16 - s^2}$ بحيث أن رؤوسه هي اصفار الاقتران والرأسين الآخرين يقعان على

منحنى الاقتران $u(s)$ فوق محور السينات.

الجواب: المساحة = $3\sqrt{2}$ ١٢ وحدة مربعة

سؤال (٢٦)

وزاري ٢٠٠٨: جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن والذي تنطبق قاعدته الكبرى

على محور السينات ويقع رأساه الاخران على منحنى الاقتران $u(s) = 3s - s^2 + 2$

الجواب: الطول = $2\sqrt{2}$ سم، العرض = ٤ سم

سؤال (٢٧)

وزاري ٢٠٠٢: جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في النقطة $(٠, ٢)$ والرأسان الأخران على منحنى الاقتران $٧(س) = ٨ + ٤س + س^٢$.

(قاعدة المثلث توازي محور السينات)

الجواب: المساحة = ١٦ وحدة مربعة

سؤال (٢٨)

كتاب ص (٢٣) نشاط (٢): أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات أما الرأسان الأخران فأحدهما يقع على المستقيم ص = ٢٠ س والأخر على المستقيم ص = ٤٢ - س.

الجواب: المساحة = ٤٢٠ وحدة مربعة

سؤال (٢٩)

وزاري ٢٠٠٦: جد أقل كمية من الصفيح اللازم لصناعة علبة على شكل أسطوانة دائرية مغلقة القاعدتين سعتها ٦π سم^٣.

الجواب: م = ٤π سم^٢

سؤال (٣٠)

كتاب ص ٨٧ س (٢): مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢π سم^٣ فإذا علمت أن سعر كل ٢ سم من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

الجواب: نصف القطر = ٤ سم

الارتفاع = ١٢ سم

سؤال (٣١)

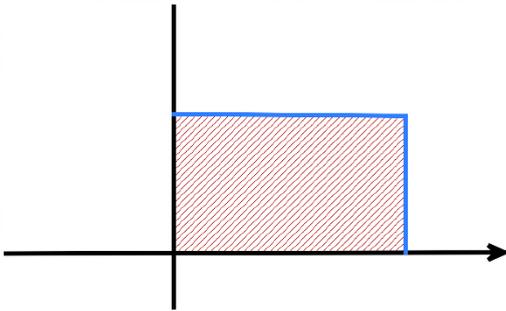
وزاري ٢٠١٠: يراد صنع وعاء معدني على هيئة أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من الأعلى، سعتها هي 1π سم^٣، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة هي ٣ دنانير لكل سم^٢ من قاعدة الأسطوانة وديناراً واحداً لكل سم^٢ من سطحها الجانبي جد ابعاد الأسطوانة التي تجعل تكليف صنعها اقل ما يمكن.

الجواب: نصف القطر = ٣ سم

الارتفاع = ٩ سم

سؤال (٣٢)

وزاري ٢٠١٤: أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج عن دوران المستطيل الذي محيطه (٦٠ سم) دورة كاملة حول أحد أضلاعه.



الجواب: الحجم = 400π سم^٣

سؤال (٣٣)

يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ سم^٣ جد ابعاده بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

الجواب: الطول = العرض = ٤ سم

الارتفاع = ٢ سم

سؤال (٣٤)

يراد عمل خزان معدني مقفل على هيئة متوازي مستطيلات سعته ٤٥ م^٣، بحيث تكون كل من قاعدته العليا والسفلة مربعة الشكل فإذا كانت تكاليف المتر المربع من قاعدته السفلة ٤ دنانير لكل متر مربع ومن قاعدة العليا ٦ دنانير لكل متر مربع ومن الجوانب ٣ دنانير لكل متر مربع، أوجد ابعاد هذا الخزان حتى تكون تكاليفه اقل ما يمكن وما تكاليفه عندئذ.

الجواب: الطول = العرض = ٣ سم

الارتفاع = ٥ م

التكاليف = ٢٧٠ دينار

سؤال (٣٥)

صندوق من الصفيح على هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من الأعلى. فإذا كان طول قاعدته مثلي عرضه وكان حجمه ٢٨٨ سم^٣، فأوجد ابعدا هذه الصندوق بحيث يكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن.

الجواب: الطول = ١٢ سم

العرض = ٦ سم

الارتفاع = ٤ سم

سؤال (٣٦)

كتاب س ٦ ص (٨٧): جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.

الجواب: الحجم = $\frac{٢٥٦}{٩}$ وحدة حجم

سؤال (٣٧)

كتاب ص ٩٠ س (٨): ما أبعاد مخروط دائري قائم ذات أكبر حجم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

الجواب: نق = $\frac{2\sqrt{2}}{9} \times 20$ ، الارتفاع = $\frac{40}{3}$ سم

سؤال (٣٨)

وزاري ١٩٩٦ تفوق: أوجد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها يساوي $2\sqrt{2}$ سم.

الجواب: الحجم = $\pi \times 4$ سم^٣، نق = $2\sqrt{2}$ سم

سؤال (٣٩)

كتاب ص ٨٧ س (٤): جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة $f = \frac{\pi}{4}t^2 + b$ ج $\frac{\pi}{4}t$ فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢، ٠] هي ١٠ م/ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ، ب.

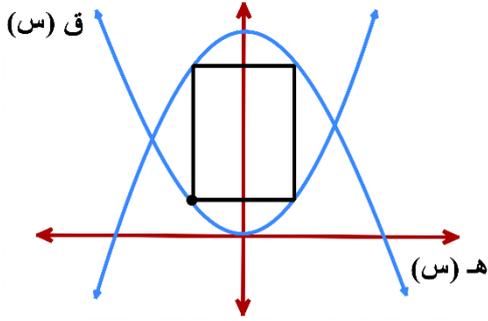
الجواب: أ = -١٠، ب = ١٠

سؤال (٤٠)

كتاب ص ٨٧ س (٥): في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠ كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم / الساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠ كم في الساعة، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟ (علماً بأن الباخرتين تحركتا في نفس الوقت)

الجواب: الزمن = ١٣ ساعة، ١٢ دقيقة

سؤال (٤١)

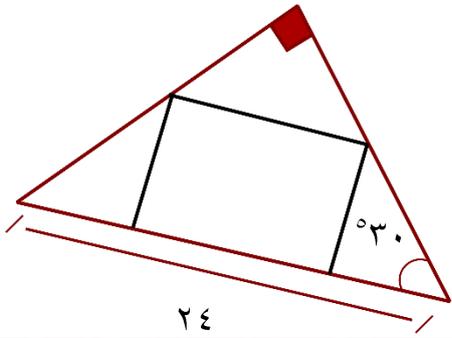


تميز: ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث رؤوسه الأربعة على

المنحنيات ق(س) = ٢س، هـ(س) = ٦ - ٢س

الجواب: المساحة = ٨ سم ٢

سؤال (٤٢)

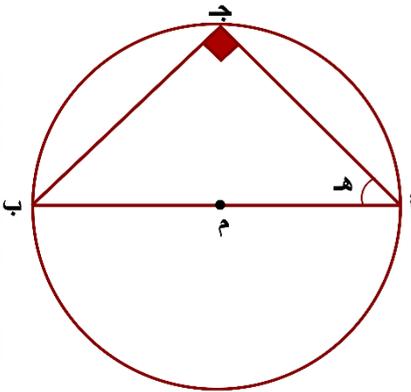


تميز: جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم

طول الوتر فيه ٢٤ سم واحد زواياه ٣٠°.

الجواب: المساحة = $36\sqrt{3}$ سم ٢

سؤال (٤٣)



أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ج، مرسوم داخل دائرة بحيث أن الوتر يساوي قطر

الدائرة، ج أ ب زاوية تقع على محيط الدائرة، وطول القطر ٨ سم، أوجد أكبر

مساحة ممكنة للمثلث.