

## مراجعة الوحدة الثانية

### الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

#### الدرس الأول: الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

أولاً: التزايد والتناقص من خلال الرسم:

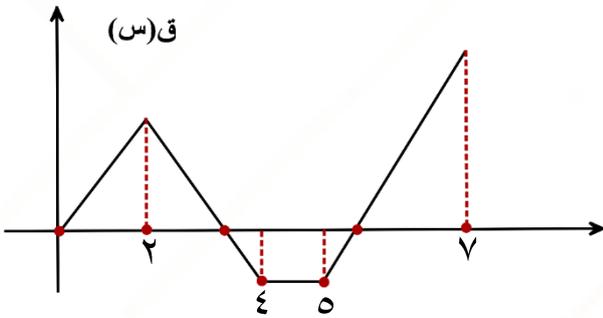
(١) يكون  $u$  (س) متزايد إذا كان طالع (↗)

(٢) يكون  $u$  (س) متناقص إذا كان نازل (↘)

(٣) يكون  $u$  (س) ثابتاً إذا كان ماشي بخط مستقيم (→)

#### مثال سريع

أوجد فترات التزايد والتناقص والفترة التي يكون فيها ثابتاً لتمثيل البياني الذي يمثل  $u$  (س) على الفترة  $[0, 7]$



#### ثانياً: التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الالوي.

- يتم تحديد التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران  $u$  (س) من خلال دراسة إشارة المشتقة الأولى.
- إذا كان  $u$  متصلاً على  $[a, b]$  وقابل للاشتقاق على  $]a, b[$  فإن:
  - يكون  $u$  (س) متزايداً على  $[a, b]$  إذا كانت  $u'(s) > 0$  لكل  $s \in ]a, b[$ .
  - يكون  $u$  (س) متناقصاً على  $[a, b]$  إذا كانت  $u'(s) < 0$  لكل  $s \in ]a, b[$ .
  - يكون  $u$  (س) ثابتاً على  $[a, b]$  إذا كانت  $u'(s) = 0$  لكل  $s \in ]a, b[$ .

### قيم س الحرجة

هي القيم التي يكون عندها المشتقة تساوي صفر أو غير موجودة بشرط أن تكون معرفة على المجال.

• تكون القيم الحرجة عند:

- (١) اصفار المقام في المشتقة الأولى.
- (٢) اصفار البسط في المشتقة الأولى.
- (٣) نقاط عدم الاتصال
- (٤) نقاط عدم الاشتقاق
- (٥) أطراف الفترة.

### خطوات إيجاد فترات التزايد والتناقص

- (١) نحدد المجال إذا لم يكن معطى.
- (٢) نشتق ونجد قيم س الحرجة.
- (٣) نحدد قيم س الحرجة على خط الاعداد وندرس إشارة  $f'(s)$ .

### إشارة $f'(s)$

في حالة عدم وجود إشارة  
↓  
يكون ق ثابت

في المنطقة السالبة  
↓  
يكون ق متناقص

في المنطقة الموجبة  
↓  
يكون ق متزايد

ملاحظة:

إذا المجال مش معطي لازم احده قبل ما ابليش بالحل.

ملاحظة:

أطراف الفترة المغلقة هي قيم حرجة.



أسئلة وزارة شاملة / دوائر

١ (٢٠١٦) إذا كان  $U(s) = (s-1)^3 (s-2)^4$  فإن ق يكون متناقصاً على الفترة:

- (أ)  $[-1, \infty)$  (ب)  $[-1, 1]$  (ج)  $[1, 2]$  (د)  $[2, \infty]$

٢ (٢٠١٩) ما قيمة / قيم الثابت التي تجعل الاقتران  $U(s) = (s-13)(s+7)$  متزايداً على ح:

- (أ)  $1 < 2$  (ب)  $1 = 2$  (ج)  $1 > 2$  (د)  $1 = 2$

٣ (٢٠١٩) إذا كان  $U(s)$  اقتران كثير حدود من الدرجة الرابعة، فما أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران  $U(s)$ ؟

- (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

٤ (٢٠٢٠) إذا كان الاقتران  $U(s) = s^2 - 32s$  فما عدد القيم الحرجة للاقتران ق على مجاله.

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٥ (٢٠٢٠) (دور ثاني) إذا كان الاقتران  $U(s) = s^2 - s$  فما قيمة / قيم س الحرجة لمنحنى  $U'(s)$ .

- (أ)  $2 -$  (ب)  $1 -$  (ج)  $1 - , 0$  (د)  $2 - , 0$

٦ (٢٠٢١) إذا كان  $U(s) = s^2 - s^3$  ما العبارة الصحيحة بالنسبة للاقتران  $U(s)$ .

(أ) متزايد في ح

(ب) متناقص في ح

(ج) متزايد في  $[0, \infty)$  ومتناقص في  $[-1, \infty)$

(د) متناقص في  $[0, \infty)$  ومتزايد في  $[-1, \infty)$



٧ (٢٠٢١) (دور ثاني) ما عدد التقاط الحرجة للاقتزان  $u(s) = s \sqrt{1-s}$  المعروف على مجاله؟

- أ) ٠      ب) ١      ج) ٢      د) ٣

٨ (٢٠٢٢) إذا كان  $u(s) = (s^3 - 8)(s - 3)^4$ ، فما الفترة التي يكون فيها منحنى  $u(s)$  متزايداً؟

- أ)  $[-2, \infty)$       ب)  $[-3, \infty)$       ج)  $[2, 3]$       د)  $[-3, 3]$

٩ (٢٠٢٣) (دور أول) ما مجموعة قيم  $s$  للنقاط الحرجة للاقتزان  $u(s) = s^2 - s$ ،  $s \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ؟

- أ)  $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^5}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$       ب)  $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$   
ج)  $\left\{\frac{\pi}{2}, 0\right\}$       د)  $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, 0\right\}$

١٠ (٢٠٢٤) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = s \sqrt{s}$  (قتاس)،  $s \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^3}{4}\right]$  متي يكون منحنى  $u(s)$  متزايداً؟

- أ)  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$       ب)  $\left[\frac{\pi^3}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$       ج)  $\left[\frac{\pi^3}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$       د)  $\left[\frac{\pi^3}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



أسئلة وزارية شاملة / مقالي

١١ (٢٠٢١) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = \sqrt[3]{s^3 - 3s^2}$  ، أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران  $u(s)$

الجواب: ق متناقص  $[2, \infty)$  ق متزايد  $[-\infty, 0] \cup [0, 2]$

١٢ (٢٠٢١) (الدورة الثالثة)  $u(s) = (s^2 - 3)^s$  ،  $s \in \mathbb{R}$  أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران  $u(s)$ .

الجواب: ق متناقص  $[-1, 3]$  ق متزايد  $[-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

١٣ (٢٠٢١) (دورة ثالثة) إذا كان  $u(s)$  ،  $h(s)$  اقتراين قابلين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ، وكان  $u'(s) = (s)^2 + (s)^2 h'(s) + s^3 + s$  ، اثبت أن الاقتران  $u(s)$  متزايد في  $\mathbb{R}$  علماً بأن  $u'(s) = h(s)$  ،  $h'(s) = -u(s)$

١٤ (٢٠٢٣) (دور أول) إذا كان  $u(s)$  ،  $h(s)$  اقتراين بحيث  $u'(s) + h(s) = 0$  ،  $h'(s) - u(s) = 0$  ،  $u(s)h(s) < 0$  ، عين مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران  $u(s) = \frac{u(s)}{h(s)}$  ، في الفترة  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  ؟

الجواب: متزايد على  $[\frac{1}{2}, 0]$  متناقص على  $[\frac{1}{2}, 0]$

١٥ (٢٠٢٤) (دور أول) إذا كان الاقتران  $u(s) = 3 \cos s$  ،  $s \in [\pi, 0]$  ، جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران  $u(s)$  ؟

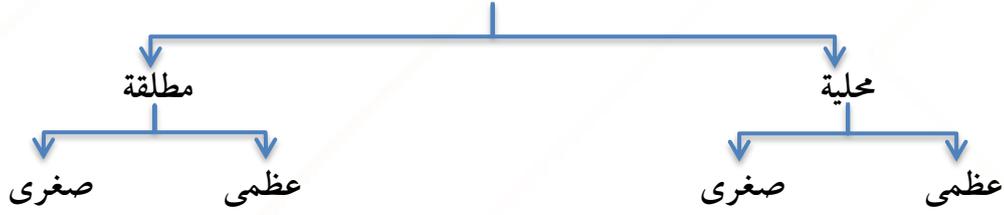
الجواب: متزايد  $[\frac{\pi}{4}, 0]$  متناقص على  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$



## الدرس الثاني: القيم القصوى

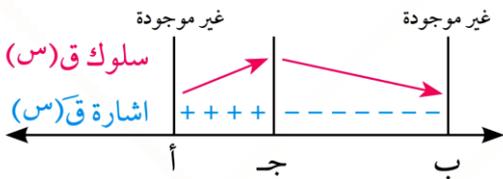
- هي القيم العظمى والصغرى وتكون دائماً عند القيم الحرجة.
- كل قيمة قصوى يوجد عندها قيمة حرجة وليس كل قيمة حرجة عندها قيمة قصوى.

### القيم القصوى



- القيمة العظمى المحلية: هي أكبر قيمة في محيطها.
- القيمة الصغرى المحلية: هي أصغر قيمة في محيطها.
- القيمة العظمى المطلقة: هي أكبر قيمة للاقتران.
- القيمة الصغرى المطلقة: هي أصغر قيمة للاقتران.

### اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى:



إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في الفترة [أ، ب] وكانت (ج، ق) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، ج  $\in$  [أ، ب] فإنه:

(1) إذا كان ق(س)  $<$  عندما  $أ > س > ج$ ، وكان ق(س)  $>$  عندما

$ج > س > ب$  فإن ق(ج) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

(2) إذا كان ق(س)  $>$  عندما  $أ > س > ج$ ، وكان ق(س)  $<$  عندما

$ج > س > ب$  فإن ق(ج) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



### اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلًا في [أ، ب] وقابلًا للاشتقاق في ]أ، ب[ فإن:

- |   |
|---|
| (1) ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) $<$ عندما $س < أ$ (بداية تزايد) |
| (2) ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) $>$ عندما $س < أ$ (بداية تناقص) |
| (3) ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق(س) $<$ عندما $س > ب$ (نهاية تزايد) |
| (4) ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق(س) $>$ عندما $س > ب$ (نهاية تناقص) |



أسئلة وزارة / مقالي

١ (٢٠٢١) إذا كان الاقتران  $U(s) = s^3 - 3s^2 - 5s + 1$  ،  $s \in ]0, 2[$  فأوجد:

١- فترات التزايد والتناقص للاقتران  $U(s)$       ٢- القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران  $U(s)$

الجواب: متزايد  $[-2, 1]$ ،  $[6, 5]$       متناقص  $[-5, 1]$   
 $U(-2) = 2 - 12 + 10 + 1 = -1$  صغري محلية       $U(5) = 125 - 75 - 25 + 1 = 26$  عظمي مطلقة  
 $U(1) = 1 - 3 - 5 + 1 = -6$  عظمي مطلقة       $U(0) = 1$  صغري مطلقة

٢ (٢٠٢٣) (دور أول) إذا كان  $U(s) = s^3 - 3s^2 + 9s + 1$  ،  $s \in ]-1, 4[$  ، جد القيم القصوى

المحلية للاقتران  $U(s)$

الجواب:  $U(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$  صغري مطلقة       $U(4) = 64 - 48 + 36 + 1 = 53$  عظمي مطلقة  
 $U(3) = 27 - 27 + 27 + 1 = 28$  صغري       $U(1) = 1 - 3 + 9 + 1 = 8$  عظمي مطلقة

٣ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان الاقتران  $U(s) = 8s^3 - 12s^2 + 6s - 1$  ،  $s \in ]0, 4[$  ، جد القيم القصوى

المحلية للاقتران  $U(s)$  ، وحدد نوعها.

الجواب:  $U(2) = 64 - 48 + 12 - 1 = 27$  عظمي محلية       $U(4) = 128 - 192 + 24 - 1 = -41$  عظمي محلية

٤ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان  $U(s) = 5s^3 - 15s^2 + 10s - 1$  ،  $s \in ]0, 5[$  بحيث  $U(5) > 0$

وكان  $U(s) = 0$  ، أثبت أن  $U(s) > 0$  قيمة عظمي مطلقة للاقتران  $U(s)$  في  $]-5, 0[$

٥ (٢٠٢٤) (دور أول) إذا كان الاقتران  $U(s) = 3s^3 - 3s^2 + 3s + 1$  ،  $s \in ]0, \pi[$  ، جد القيم القصوى المحلية

والمطلقة لمنحنى الاقتران  $U(s)$  ، (ان وجدت)؟

الجواب:  $U(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \frac{3\pi}{4} + 1$  عظمي محلية مطلقة       $U(\pi) = 3\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi + 1$  عظمي محلية  
 $U(\frac{3\pi}{4}) = \frac{27}{64} - \frac{27}{64} + \frac{9\pi}{8} + 1$  صغري محلية مطلقة       $U(0) = 1$  صغري محلية

٦ (٢٠٢٤) (دور ثاني) باستخدام القيم القصوى، اثبت أن المقدار  $s^2 + \frac{16}{s} + 1$  ،  $s \in ]1, \infty[$  ،

موجب دائماً.



أسئلة وزارة / ضع دائرة

١ (٢٠٠٧) للاقتران  $u(s) = 5 - 2s^2$  ، قيمة عظمى في الفترة  $[0, 3]$  عندما  $s =$

- (أ) ١ (ب)  $\frac{3}{2}$  (ج)  $\frac{5}{2}$  (د) صفر

٢ (٢٠١٢) إذا كان  $u(s)$  ، معرفاً على  $H$  ، وكانت  $u'(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2}$  ، فإن عدد النقاط الحرجة للاقتران  $u(s)$  يساوي:

- (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٣ (٢٠١٧) إذا كان الاقتران  $u(s) = \left. \begin{matrix} s^2 ، 1 - s > s \geq 1 \\ s^2 + 1 ، 1 > s \geq 2 \end{matrix} \right\}$  ، فإن عدد النقاط الحرجة  $u(s)$

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٤ (٢٠١٧) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = s + \frac{1}{s}$  ،  $s < 0$  ، صفر ، فإن العبارة الصحيحة فيما يأتي:

- (أ)  $u(s)$  متزايد على  $[0, \infty)$  (ب)  $u(1)$  هي القيمة العظمى المطلقة للاقتران  $u(s)$   
(ج)  $u(s)$  متزايد على  $[0, 1]$  (د)  $u(1)$  هي القيمة الصغرى المطلقة للاقتران  $u(s)$

٥ (٢٠٢٠) (دور ثاني) ليكن  $u(s)$  ،  $h(s)$  اقترانين سالبين وقابلين للاشتقاق ومتناقصين على  $H$  ،

وكان  $l(s) = (u \circ h)(s)$  ، فأأي العبارات التالية صحيحة على الاقتران  $l(s)$

- (أ)  $l(s)$  متناقص على  $H$  (ب)  $l(s)$  متزايد على  $H$   
(ج)  $l(s) \leq 0$  (د)  $l(s)$  اقتران ثابت



٦ (٢٠٢٠) (دور ثاني) ليكن  $u(s) = 6(1+s)(2-s)^2$ ، فإن لمنحنى الاقتران  $u(s)$  قيمة:

- (أ) عظمى محلية عند  $s = 1$  (ب) صغرى محلية عند  $s = 1$   
(ج) عظمى محلية عند  $s = 2$  (د) صغرى محلية عند  $s = 2$

٧ (٢٠٢٠) (دور ثالث) إذا كان لمنحنى  $u(s) = 2s^3 + 1s$  قيمة صغرى محلية عندما  $s = 1$  فما قيمة  $u$

- (أ)  $3-$  (ب)  $2-$  (ج)  $3$  (د)  $2$

٨ (٢٠٢٢) إذا كان  $u(s) = \frac{1}{s}$  معرفاً في الفترة  $[\pi, 0]$ ، فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران  $u(s)$ ؟

- (أ)  $-\pi$  (ب)  $1-$  (ج)  $\frac{1}{\pi}$  (د)  $1$

٩ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = \sqrt{9-s^2}$ ،  $s \in [-3, 3]$  فما قيمة  $s$  التي يكون عندها للاقتران  $u(s)$  قيمة عظمى مطلقة؟

- (أ)  $3-$  (ب) صفر (ج)  $1$  (د)  $3$

١٠ (٢٠١٩) (رام الله والبيرة) إذا كان  $u(s) = \begin{cases} 2 - s^2 & 2 \geq s > 2 \\ 1 & s = 2 \end{cases}$  معرف على الفترة  $[-2, 2]$  فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة:

- (أ)  $u(2)$  عظمى محلية (ب)  $u(1)$  عظمى محلية  
(ج)  $u(0)$  عظمى محلية (د)  $u(2)$  عظمى محلية

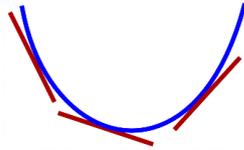


الدرس الثالث: التقعر ونقاط الانعطاف

إذا كان  $q$  اقتراناً متصلًا على الفترة  $[a, b]$  [وقابلاً للاشتقاق على الفترة]  $[a, b]$  [فيكون منحنى  $q$ ]:

(١) مقعراً للأسفل على الفترة  $[a, b]$  [إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران  $q$  في الفترة]  $[a, b]$ .

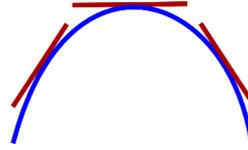
(٢) مقعراً للأعلى على الفترة  $[a, b]$  [إذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الاقتران  $q$  في الفترة]  $[a, b]$ .



المماسات

تحت المنحنى

مقعر للأعلى



المماسات

فوق المنحنى

مقعر للأسفل

\* يكون  $q$  (س) مقعراً للأعلى على  $[a, b]$  [إذا كان:  $q''(s) < 0$  لكل  $s \in [a, b]$ ]

\* يكون  $q$  (س) مقعراً للأسفل على  $[a, b]$  [إذا كان:  $q''(s) > 0$  لكل  $s \in [a, b]$ ]

\* إذا كان:  $q''(s) = 0$  لا يوجد تقعر.

**نقطة الانعطاف:** (ج، ق (ج)) هي نقطة التي يغير الاقتران حولها من طبيعة تقعره بشرط أن يكون عندها

الاقتران متصلاً.

**زاوية الانعطاف:** هي الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى  $q$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نقطة

الانعطاف.

\* يتم إيجاد زاوية الانعطاف من خلال:  $\theta = \theta' (ج)$  حيث  $0 \leq \theta < 180^\circ$

\* إذا كانت (ج، ق (ج)) نقطة انعطاف وكان  $\theta = \theta' (ج) = 0$  فتسمى النقطة (ج، ق (ج)) نقطة انعطاف أفقي.

خطوات إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل:

(١) تحديد المجال. (٢) إيجاد المشتقة الأولى والثانية.

(٣) تحديد:

(أ) أصفار المشتقة الثانية (ب) نقاط عدم الاشتقاق. (ج) الأطراف.

(٤) وضع القيم الناتجة على خط الأعداد ودراسة إشارة  $u''(s)$ .

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية:

يستخدم هذا الاختبار لتمييز القيم القصوى المحلية للاقتران بحيث:

(١) نجد  $u'(s)$

(٢) نساوي  $u'(s)$  بالصفر ونجد قيم  $s$  الحرجة من اصفار البسط فقط

(القيم عند المشتقة غير موجودة ما يهموني ابدا بهذا الاختبار)

(٣) نجد  $u''(s)$

(٤) نعوض اصفار المشتقة الأولى في المشتقة الثانية:

\* الناتج موجب: يوجد قيمة صغرى محلية.

\* الناتج سالب: يوجد قيمة عظمى محلية.

\* الناتج صفر:

\* الناتج غير موجود: يفشل الاختبار ونستخدم اختبار المشتقة الأولى.

**نظرية** إذا كان  $u'(s)$  اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي  $s$  وكان  $u'(s) = 0$  فإن:

(١)  $u''(s) > 0$  قيمة عظمى محلية، إذا كانت  $u''(s) > 0$

(٢)  $u''(s) < 0$  قيمة صغرى محلية، إذا كانت  $u''(s) < 0$

(٣) يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت  $u''(s) = 0$ ، أو  $u''(s)$  غير موجودة.

إيجاد واستنتاج الخصائص من الرسم

(١) الحالة الأولى: ق(س)

إذا جاءت رسمة ق(س) وسأل عن خصائص ق(س): -

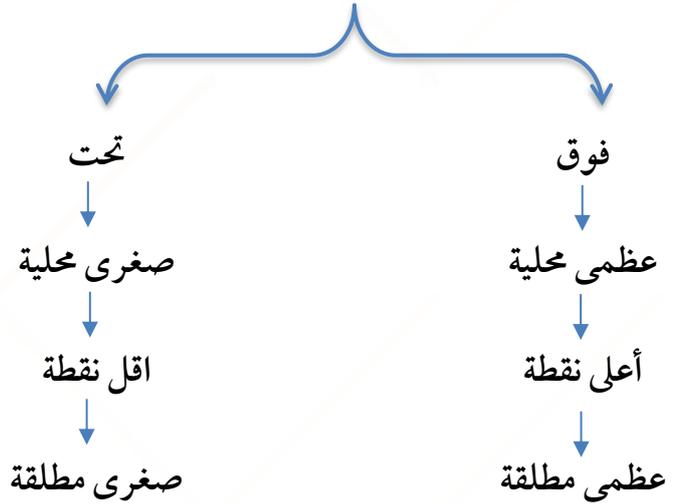
◀ التزايد والتناقص: إذا كان الاقتران صاعد يكون متزايد، وإذا كان الاقتران هابط (نازل) يكون الاقتران متناقص.

◀ التقعر للأعلى: إذا كان المنحنى فوق المماس.

◀ التقعر للأسفل: إذا كان المنحنى تحت المماس.

◀ النقاط الحرجة: عند المماسات الأفقية ونقاط عدم الاتصال والرؤوس المدببة والأطراف والخطوط الأفقية.

◀ القيم القصوى: كما نراها في الرسمة



(٢) الحالة الثانية:  $u'(s)$

إذا جاءت رسمه  $u'(s)$  وسأل عن خصائص  $q(s)$ :

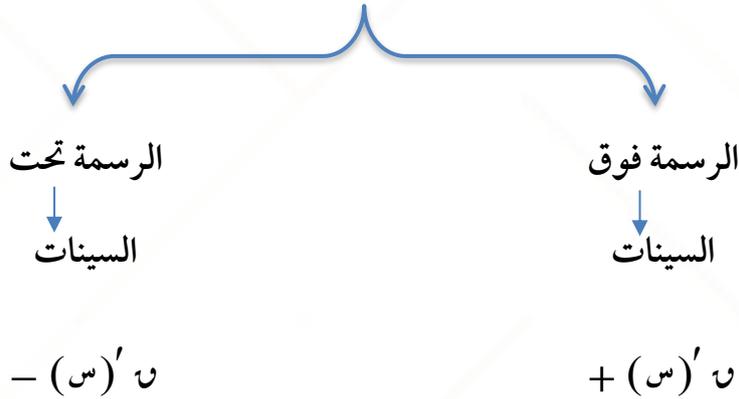
(١) نجد قيم  $s$  الحرجة وهي عبارة عن:

- التقاطع مع محور السينات.

- الأطراف

- نقاط الانقطاع في رسمه  $u'(s)$ .

(٢) نحدد قيم  $s$  الحرجة على خط الاعداد وندرس إشارة  $u'(s)$



من خلال الترجمة على خط الاعداد نستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتراح  $q(s)$ .

- التقعر للأعلى: إذا كان منحنى  $u'$  صاعد (متزايد)

- التقعر للأسفل: إذا كان منحنى  $u'$  هابط (متناقص)

- نقاط الانعطاف: عند المماسات الأفقية.



(٣) الحالة الثالثة:  $u''(s)$

إذا جاءت رسمة  $u''(s)$  وسأل عن خصائص  $u(s)$ :

- لا يمكن تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $u(s)$ .

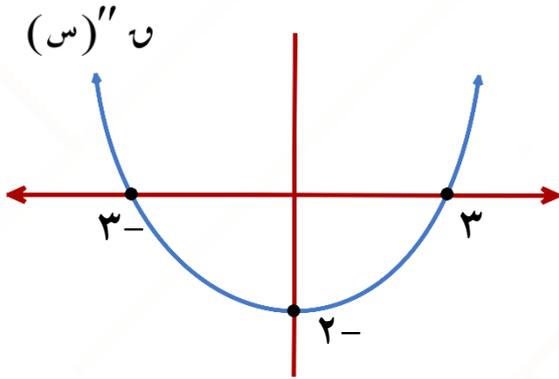
- التقعر للأعلى: عندما يكون منحنى  $u''(s)$  فوق محور السينات.

- التقعر للأسفل: عندما يكون منحنى  $u''(s)$  تحت محور السينات.

- نقاط الانعطاف: هي نقاط التقاطع مع محور السينات.

مثال

بالاعتماد على منحنى الشكل الذي يمثل  $u''(s)$  أجب عما يلي:



(١) جد فترات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى  $u(s)$ .

(٢) جد نقاط الانعطاف.

أسئلة وزارة شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠١٦) إذا كان  $u(x) = \frac{1}{4}x + \sin x$  معرفاً على  $[0, \pi]$  فإن منحنى  $u(x)$  يكون مقعراً للأسفل في:

- (أ)  $[\pi, 0]$  (ب)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (ج)  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (د)  $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$

٢ (٢٠١٦) إذا كان  $Q$  كثير حدود وكان الشكل المجاور يبين إشارة  $u''(x)$  وكانت  $u'(3) = 0$ ، فإن العبارة الصحيحة دائماً هي:

- (أ)  $u'(3) = 0$  (ب)  $u'(4) = 0$   
 (ج)  $u(3)$  قيمة صغرى محلية (د)  $u(3)$  قيمة عظمى محلية
- صفر إشارة  $u''(x)$   
 + + + + - - - -  
 4

٣ (٢٠١٧) إذا كان  $u(x) = \sin^2 x$  معرفاً على  $[\frac{\pi}{2}, 0]$  فإن قيمة  $u$  التي يكون عندها نقط انعطاف  $u =$

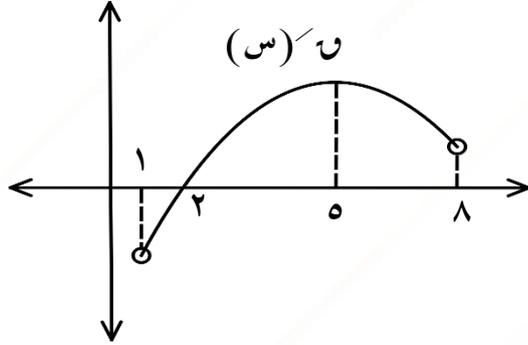
- (أ)  $\frac{\pi}{3}$  (ب)  $\frac{\pi}{4}$  (ج)  $\frac{\pi}{2}$  (د)  $\frac{\pi}{6}$

٤ (٢٠١٧) الشكل المجاور يمثل منحنى  $u'(x)$ ، على فترة  $[-3, 5]$ ، فإن  $u(x)$  يكون:

- (أ) مقعر لأسفل  $[0, 5]$   
 (ب) مقعر لأسفل  $[-3, 3]$   
 (ج) متناقصاً  $[0, 5]$   
 (د) متناقصاً  $[3, 0]$
- منحنى  $u'(x)$
- 



٥ (٢٠١٧) (دور ثاني) الشكل المجاور هو  $u$  (س) فأن نقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران  $u$  (س) هي:



(أ) (١، ق) ((١))

(ب) (٥، ق) ((٥))

(ج) (٢، ق) ((٢))

(د) لا يوجد له نقطة انعطاف

٦ (٢٠١٧) (دور ثاني) إذا كان  $u$  (س) كثير حدود، وكانت زاوية ميل المماس لمنحنى  $u$  (س) عند أي نقطة

عليه في الفترة  $[٥،٢]$  هي زاوية منفرجة، فإن العبارة الصحيحة هي:

(أ) ق (س) متناقص في الفترة  $[٥،٢]$  (ب) ق (س) متزايد في الفترة  $[٥،٢]$

(ج) ق (س) مقعر للأعلى في الفترة  $[٥،٢]$  (د) ق (س) مقعر للأسفل علي الفترة  $[٥،٢]$

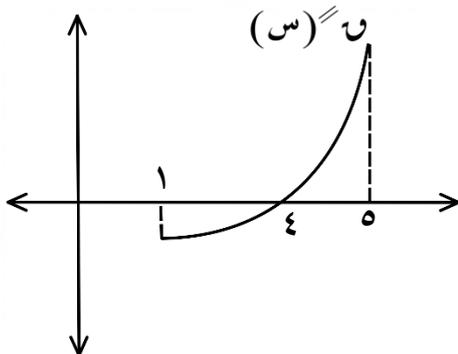
٧ (٢٠١٧) إذا كانت النقطتان  $(٠، ٠)$  ،  $(\frac{1}{2}، \frac{1}{2})$  هما نقطتا انعطاف لمنحنى ق (س) وكانت

$u$  (س) =  $٤س^٣ - ٣س^٢$  ، فإن قيم الثابت ك هي:

(أ) ٣ - (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

٨ (٢٠١٨) الشكل المجاور يمثل منحنى  $u$  (س) ، حيث  $u$  (س) كثير حدود،  $u$  (٣) = ٠ ، فأن العبارة

الصحيحة:



(أ) ق (٣) قيمة صفري محلية

(ب) ق (س) مقعر للأعلى في  $[٥،١]$

(ج) ق (س) مقعر للأعلى في  $[٥،٤]$

(د)  $u$  (س) متناقص في  $[٥،٤]$



٩ (٢٠١٩) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = s^3 + 2s - 9$ ، لـ  $\exists c$  اقترانا له نقطة انعطاف عند  $s = 1$ ، فما ظل زاوية الانعطاف؟

- (أ)  $12 -$  (ب) صفر (ج) ٣ (د) ١٢

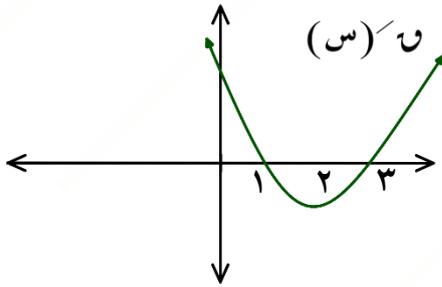
١٠ (٢٠٢٠) إذا كان  $u(s) = \sqrt[3]{6s - 2} + 2$ ، فما قياس زاوية الانعطاف لمنحني الاقتران  $u(s)$  إن وجدت؟

- (أ) ٠ (ب)  $\frac{\pi}{2}$  (ج)  $\pi$  (د) لا يوجد زاوية انعطاف

١١ (٢٠٢٠) إذا كان لمنحني الاقتران  $u(s) = 3s + 1$  نقطة انعطاف عند  $s = \frac{\pi}{6}$ ، فما قيمة  $\pi$ ؟

- (أ) ٤ (ب)  $4 -$  (ج)  $\frac{1 -}{4}$  (د)  $\frac{1}{4}$

١٢ (٢٠٢٠) معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحني الاقتران  $u'(s)$ ، ما المجال الذي يقع فيه منحني الاقتران  $u(s)$  تحت جميع مماسات



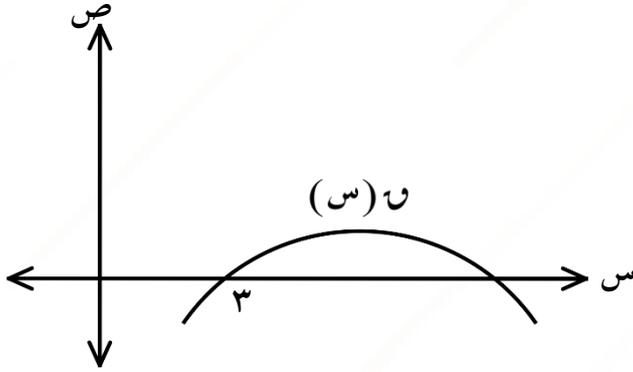
- (أ)  $]-3, 1[$   
(ب)  $]-\infty, 2[$   
(ج)  $]-1, \infty[ \cup ]1, \infty[$   
(د)  $]-2, \infty[$

١٣ (٢٠٢٢) إذا كان  $u(s) = s^3 - 3s^2 - 3s$ ، وكان قياس زاوية الانعطاف لمنحني  $u(s)$  هو  $\frac{\pi}{4}$ ، فما قيمة الثابت ج؟

- (أ)  $4 -$  (ب)  $2 -$  (ج) ٢ (د) ٤



١٤ (٢٠٢٢) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران كثير الحدود  $u(s)$ ، أي العبارات الآتية صحيحة دائماً



أ)  $u(3) > u(3)'' > u(3)'$

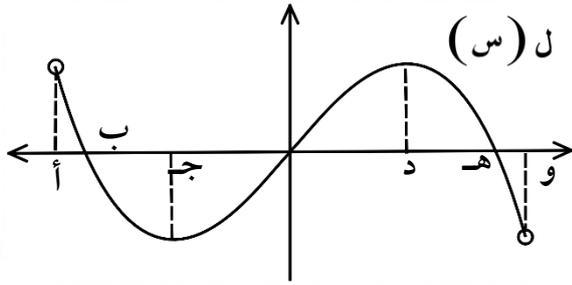
ب)  $u(3) > u(3)' > u(3)''$

ج)  $u(3)' > u(3) > u(3)''$

د)  $u(3)' > u(3)'' > u(3)$

١٥ (٢٠٢٤) (دور أول) الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران  $l(s)$  المعروف على  $[a, b]$ ، أي من الفترات

التالية يكون عندها  $l(s) \times l'(s) \times l''(s)$  مقداراً سالباً؟



أ)  $[b, c]$

ب)  $[a, b]$

د)  $[c, e]$

ج)  $[a, b]$



أسئلة وزارة شاملة / مقال

١ (٢٠١٩) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = s^3 - 3s^2 - 9s + 5$ ،  $s \in ]-2, 6[$ ، أوجد كلاً مما يلي:

(١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران  $u(s)$  (٢) القيم القصوى المحلية للاقتران  $u(s)$

(٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران  $u(s)$

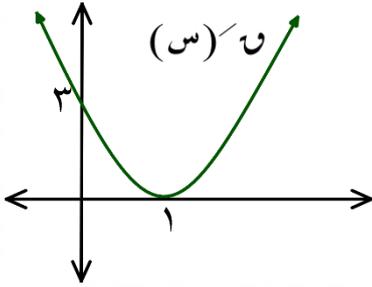
الجواب: (١)  $u(s)$  متزايد على  $[-2, 3]$  و  $u(s)$  متناقص على  $[-3, 6]$

(٢) (٣، ٢) صغري محلية (١، ٠، ١) عظمي محلية

(٣) (٢٢، ٤٣) صغري مطلقة (٥٩، ٦) عظمي مطلقة

(٣)  $u(s)$  مقعر لأعلى  $[-6, 1]$   $u(s)$  مقعر لأسفل  $[-1, 6]$

(١)  $u(s)$  نقطة انعطاف



٢ (٢٠٢٠) (دور ثاني) يمثل الشكل منحنى  $u(s)$  لكثير حدود

$u(s)$  من الدرجة الثالثة أوجد قاعدة الاقتران  $u(s)$  إذا علمت أن

منحناه يمر بنقطة الأصل.

الجواب:  $u(s) = s^3 - 3s^2 + 3s$

٣ (٢٠٢١) (دور ثاني) إذا كان  $u(s) = s^3 + 3s^2 + 2b$  حيث  $a, b \in \mathbb{R}$  وكان لمنحنى  $u(s)$

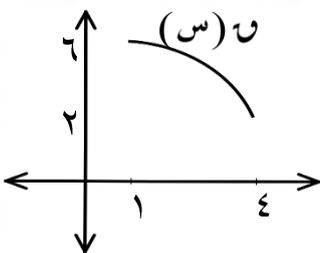
قيمة عظمى محلية قيمتها ٨ وله نقطة انعطاف عند  $s = 1$ ، فأوجد قيم الثابتين  $a, b$

الجواب:  $a = 1, b = 2$

٤ (٢٠٢٢) إذا كان  $u(s) = (s^2 - s)^2$ ، وكان لمنحنى كثير الحدود  $u(s)$  قيمة عظمى محلية

عند النقطة  $(-1, 3)$ ، وكانت  $u''(-1) = 8$ . ما قيمة  $u'(-1)$ ؟

الجواب: ٢



٥ (٢٠٢٣) (دور ثاني) الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران  $u(s)$  في

الفترة  $[1, 4]$ ، إذا كان  $u(s) = 2s^2 - s$ ، اثبت أن  $u(s)$

مقعراً للأسفل في الفترة  $[1, 4]$ ؟



الدرس الرابع: تطبيقات عملية على القيم القصوى

١ (٢٠٢٠) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول، بحيث يقع راسان من رؤوسه على محور السينات، أما الرأس الآخران: فإحدهما يقع على المستقيم  $v = 20$ ، والآخر على المستقيم  $v = 42 - s$

الجواب: ٤٢٠

٢ (٢٠٢٠) (دور ثاني) أوجد مساحة أكبر شبه منحرف متساوي الساقين يمكن رسمه داخل منحنى الاقتران  $v(s) = \sqrt{16 - s^2}$ ، بحيث أن رؤوسه أصفار الاقتران، والرأسين الآخرين يقعان على منحنى الاقتران  $v(s)$  فوق محور السينات

الجواب: ٦  $\sqrt{12}$

٣ (٢٠٢٠) (دور ثالث) يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطته بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطته بهذا السياج

الجواب: ٤٠٠ م<sup>٢</sup>

٤ (٢٠٢١) جد مساحة أكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٠ سم بحيث ينطبق أحد أضلاعه على قاعدة المثلث ويقع الرأس الآخران على ساقى المثلث

الجواب: ٣٠ م<sup>٢</sup>

٥ (٢٠٢١) (دور ثاني) أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم طول راسمه  $\sqrt{12}$  سم

الجواب:  $\frac{\pi 16}{3}$  م<sup>٣</sup>

٦ (٢٠٢٢) جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، بحيث يقع أحد أضلاعه على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة.

الجواب: ١٦ م<sup>٢</sup>



٧ (٢٠٢٢) (دور ثاني) أ ب ج د مستطيل فيه  $\overline{AB} = ٤$  متراً،  $\overline{BC} = ٦$  متراً، ( و ) نقطة على الضلع ب ج ، عين موقع النقطة ( و ) بحيث تكون قيمة المقدار  $٣(\overline{AO}) + (\overline{OJ})$  أقل ما يمكن.

الجواب:  $\frac{٢٧}{٢}$

٨ (٢٠٢٣) سلك طوله ١٢٠ سم ، تم قطعه إلى أجزاء لتشكيل حواف ( أحرف ) صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل . ما أكبر حجم ذلك الصندوق؟

الجواب: ١٠٠٠

٩ (٢٠٢٣) (دور ثاني) ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها يساوي ٥ سم؟

الجواب: ٥٠

١٠ (٢٠٢٣) (دور ثالث) ما مساحة أكبر مستطيل يمكن احاطته بسياج طوله ١٦ م؟

الجواب: ١٦

١١ (٢٠٢٤) (دور أول) يراد انشاء خزان على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومفتوح من الأعلى بتكلفة (٤٨) دينار ، فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة (١٦) دينار ، وتكلفة المتر المربع من الجوانب (٤) دنانير، أوجد أبعاد الخزان بحيث تكون سعته أكبر ما يمكن؟

الجواب: ١م ، ١م ، ٢م

١٢ (٢٠٢٤) (دور ثاني) أ ب ج د شبه منحرف متساوي الساقين محيطه (٤٠) سم وقياس الزاوية  $\angle A = ٦٠^\circ$  ، أحسب أطوال أضلاعه التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟

الجواب: أ ب = ج د = ١٠ سم

س ا = ٥ سم

ب ج = ١٥ سم

