مراجعة الوحدة الثالثة

الوحدة الثالثة: المصفوفات والمحددات

الدرس الأول: المصفوفـــة

- إيجاد عناصر من المصفوفة
- كتابة المصفوفة عن طريق قاعدة او اقتران
- أنواع المصفوفات
- تساوي المصفوفات

- المصفوفة $أ_{م\times ن}$ هي مصفوفة تتكون من (م) من الصفوف، (ن) من الأعمدة.
- العنصر $أ_{٣٢}$ هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعامود الثالث.
- $أ_{٣٢}$ يمثل عنصر، $أ_{٣\times ٢}$ تمثل مصفوفة.

مثال أكتب المصفوفة أ من الرتبة ٢ × ٣ بحيث

$$أ_{يه} = \begin{cases} -١ & ، \quad ي < ه \\ ١ & ، \quad ي = ه \\ ٢ & ، \quad ي > ه \end{cases}$$

$$أ_{٣\times ٢} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ -١ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

تساوي المصفوفات

يوجد شرطين لتساوي المصفوفات: -

- إذا كان ق متصلاً على [أ، ب] وقابل للاشتقاق على] أ، ب [فإن:

(١) يكون لهما نفس الرتبة.

(٢) المدخلات المتناظرة متساوية لكل عنصر في المدخلات.

أنــواع المصفوفات

(١) المصفوفة المربعة:

يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ٠ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٧ & ٩ \end{bmatrix}$

(٢) مصفوفة الوحدة "م":

هي مصفوفة مربعة دائماً، جميع مدخلاتها اصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي تكون عناصره =١ ويرمز لها بالرمز "م".

$$م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & ، ي = هـ \\ ٠ & ، ي \neq هـ \end{cases}$$

مثال: $م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $م_٣ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٣) مصفوفة الصفرية "و":

تكون جميع مدخلاتها اصفار ويرمز لها بالرمز "و"وليس بالضرورة أن تكون مربعة.

مثال: $و_{٣×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) مصفوفة الصف:

تتكون من صف واحد ومن الرتبة ١×ن

مثال: $أ = [١ \quad ٢ \quad ٣]$ ← أ من الرتبة ١×٣

(٥) مصفوفة العمود:

تتكون من عمود واحد ومن الرتبة م ×١ .

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ⟵ أ من الرتبة ٣×١

(٦) مصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة بحيث:

$س_{يهـ} = ٠$ لكل $ي \neq هـ$. ⟸ مدخلات القطر مش ضروري تكون واحد، ممكن تكون أي اشي.

مثال: $س = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(٧) مصفوفة المثلثية العلوية:

هي مصفوفة مربعة تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي اصفاراً

مثال: $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

ملاحظة:

المصفوفة القطرية والمثلثية العلوية والوحدة هي مصفوفات مربعة.

059-488-5006

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠١٩) (دور أول) إذا علمت أن س $= \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ -٢ & ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٣س_{١٢} + ٥س_{٢١}$ ؟

أ) -١٤ ب) -٤ جـ) ٤ د) ١٦

٢ (٢٠١٩) (دور ثاني) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة $٣أ_{٣١} + ٢أ_{١٢}$ ؟

أ) -٤ ب) -١ جـ) ١ د) ٤

٣ (٢٠٢٠) (دور ثاني) ما مجموعة حل المعادلة التالية $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٦ \\ س^{٢} & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & س+٢ \\ ٧ & -٢س+٨ \end{bmatrix}$ ؟

أ) $\{-٢\}$ ب) $\{٢\}$ جـ) $\{٢، -١، -٤\}$ د) ٥

٤ (٢٠٢١) (دور ثاني) إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٢ \\ ٨ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة المقدار $|س^{٢}| + ص$ ؟

أ) ٧ ب) -١ جـ) ١ د) ٥

٥ (٢٠٢١) (دور ثاني) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة المقدار $أ_{٣٢} - أ_{٢٣}$ ؟

أ) -١٦ ب) -٢ جـ) ٢ د) ١٦

٦ (٢٠٢١) (دور ثالث) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٦ & ٠ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

فما قيمة $٣أ_{٣٢} - ٢ب_{٢١}$ ؟

أ) -٧ ب) -١ جـ) ١ د) ٧

٧ (٢٠٢٢) (دور أول) ما المصفوفة جـ$_{٢\times٢}$ بحيث تحقق جـ$_{ي\times و}$ = (ي)$^{-و}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -١ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & \\ \frac{١}{٤} & \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ \frac{١}{٤} & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

---

٨ (٢٠٢٣) (دور أول) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٥ \\ ٢ & -٩ & ١٥ \\ ٨ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ١٣$_{٢٣}$ أ$_{٣١}$ − ١٢$_{٣١}$ ؟

أ) −٣٥ ب) −٨ جـ) ٨ د) ٣٥

---

٩ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان ك$_{يهـ}$ = $\begin{cases} ي + هـ & ، ي < هـ \\ هـ - ي & ، ي > هـ \\ \frac{ي}{هـ + ي} & ، ي = هـ \end{cases}$ ، فما قيمة $\sum_{هـ=١}^{٣}$ (ك)$_{٢هـ}$ ؟

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٧}{٢}$ جـ) $\frac{٩}{٢}$ د) $\frac{١٥}{٢}$

---

١٠ (٢٠٢٤) (دور ثاني) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & س - ١ \\ ٢س + ٣ & س + ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان أ$_{يهـ}$ = أ$_{هـي}$ ، فما قيمة س؟

أ) ٤ ب) −٣ جـ) ٣ د) −٤

059-488-5006

أسئلة وزارية شاملة / مقالي

١ اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٤ بحيث: $أ_{يه} = \begin{cases} ٢^{ي} & ، \quad ي < ه \\ -١ & ، \quad ي = ه \\ ٥ه & ، \quad ي > ه \end{cases}$

الجواب: $\begin{bmatrix} -١ & ١٠ & ١٥ & ٢٠ \\ ٤ & -١ & ١٥ & ٢٠ \\ ٨ & ٨ & -١ & ٢٠ \end{bmatrix}$

---

٢ إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٣} + ص^{٣} & ١ \\ ٤ & س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المقدار $س^{٢} - سص + ص^{٢}$ ؟

الجواب: ٤

---

٣ إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} + ص^{٢} & ١ \\ ٤ & س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المقدار $(س - ص)^{٣}$ ؟

الجواب: ٦٤

---

٤ إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص^{٣} & أ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ٢٥ \end{bmatrix}$ جد قيمة المقدار $س + ص + ل$ ؟

الجواب: ٢٣ ، ١٣

---

٥ $\begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٢-ع٣ & ٣- أ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ-٢ & ٢ب+١ \\ ١٦ & ج \end{bmatrix}$ جد قيم أ، ب، ج، ع

الجواب: أ = ٥ ، ب = -٣ ، ج = ٢ ، ع = ٦

---

٦ ليكن $\begin{bmatrix} أ+ب+ج & أ-ب \\ ع٢+ب-أ & أ-ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٣- & ٩ \end{bmatrix}$ جد قيم أ، ب، ج، ع

الجواب: أ = ٣ ، ب = ٦ ، ج = -٢ ، ع = ٤

الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات | ضرب المصفوفة بعدد حقيقي | حل المعادلات المصفوفية | ضرب المصفوفات

أولًا: - جمع وطرح المصفوفات: -

◄ عند جمع وطرح المصفوفات يجب أن يتحقق شرطين: (١) لهما نفس الرتبة.

(٢) نجمع المدخلات المتناظرة.

ثانياً:- ضرب المصفوفة بعدد حقيقي: -

(١) يجب ضرب العدد في جميع مدخلات المصفوفة.

(٢) المصفوفة الناتجة من نفس الرتبة.

ثالثاً:- حل المعادلات المصفوفية: -

تعتمد على العمليات على المصفوفات التي تم شرحها في الدرس الثاني.

رابعاً: - ضرب المصفوفات: -

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فأن حاصل الضرب جـ = أ × ب حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو الآتي:

$$جـ_{يه} = أ_{ي1} \times ب_{1ه} + أ_{ي2} \times ب_{2ه} + \dots\dots + أ_{ين} \times ب_{نه}$$

ملاحظة: لضرب أي مصفوفتين يجب أن تكون: -

عدد أعمدة المصفوفة أ (الأولى) = عدد صفوف المصفوفة ب (الثانية) حيث جـ = أ × ب

059-488-5006

خصائص جمع المصفوفات:

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ ..... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ ..... (المصفوفة الصّفّرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و ..... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ..... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

خصائص عملية ضرب المصفوفات:

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإنّ:

١ (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) ..... الخاصيّة التجميعيّة.

٢ أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

٣ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) ..... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

٤ أ . م = م . أ = أ .....(العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

ملاحظة:

(١) ا × ب ≠ ب × ا ← (خاصية الضرب ليست تبديلية)

(٢) إذا كان ا × ب = ا × جـ ليست بالضرورة أن تكون ب = جـ

(٣) إذا كان ا × ب = و فليس بالضرورة أن تكون ا = و أو ب = و

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠٢٠) **(دور ثاني)** إذا كانت أ،ب،جـ ثلاث مصفوفات من الرتب ٢ × ٣ ، ٣ × ٢ ، ٢ × ٢ على الترتيب، فإي العمليات الآتية صحيحة ؟

أ) أ × جـ + ب　　ب) ب × أ − ٢جـ　　جـ) ٣أ × ب + ٢جـ　　د) ب × جـ + ٥أ

---

٢ (٢٠٢١) إذا كانت أ،ب،جـ، ثلاث مصفوفات بحيث أ . ب + جـ مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢ ، وكانت أ مصفوفة عمود، فما رتبة المصفوفة ب؟

أ) ٣ × ٢　　ب) ١ × ٢　　جـ) ٣ × ١　　د) ٢ × ٢

---

٣ (٢٠٢١) **(دور ثالث)** إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ س & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ص & ٥ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧- & ١٦ \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ص × س ؟

أ) ٨　　ب) ٢-　　جـ) ٤-　　د) ٨-

---

٤ (٢٠٢٢) **(دور أول)** ما قيمة الثابت ب الذي يحقق $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ك \\ ١ \end{bmatrix} = ٦\begin{bmatrix} ك \\ ب \end{bmatrix}$ ؟

أ) ٤　　ب) ٢　　جـ) ١　　د) ٦

---

٥ (٢٠٢٢) **(دور أول)** إذا كانت أ،ب،جـ، ثلاث مصفوفات بحيث أن أ . ب + جـ مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢ وكانت أ مصفوفة عمود، فما رتبة المصفوفة ب؟

أ) ٣ × ٢　　ب) ١ × ٢　　جـ) ٣ × ١　　د) ٢ × ٢

---

٦ (٢٠٢٣) **(دور أول)** إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي س^{٢} − س ؟

أ) ٤س　　ب) ٣س　　جـ) ٤^{٢}س　　د) ٨^{٢}س

---

٧ (٢٠١٩ - ٢٠٢٣) **(دور ثاني)** إذا كانت أ، ب، جـ، ثلاث مصفوفات من الرتب ٣×٢، ك×٢، ٤×ن على الترتيب، وكانت س = أ + ب.جـ، فما قيمة المقدار ٦ك − ك×ن ؟

أ) −١٨ ب) −١٠ جـ) ١٠ د) ٢٦

---

٨ (٢٠٢٤) **(دور أول)** إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات من الرتبة ٣ × ٢، وكانت جـ = ٢أ + ٣ب، والمدخلة جـ$_{٢٣}$ = ٣، والمدخلة أ$_{٢٣}$ = −٣، ما قيمة المدخلة ب$_{٢٣}$ ؟

أ) −٣ ب) −١ جـ) ٣ د) ٩

أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢١) **(دور ثالث)** إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١- & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٥- \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ جد المصفوفة س حيث

$٢س + أ.ب = و_٢$

الجواب: $\begin{bmatrix} ١- & \frac{٣}{٢}- \\ \frac{٧}{٢}- & ٠ \end{bmatrix}$

---

٢ (٢٠٢٢) **(دور ثاني)** إذا كان $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ فما قيم كل من س، ص بحيث أن: $ب^٢ \begin{bmatrix} س \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ص \end{bmatrix}$

الجواب: س = −١ ص = ٣٦

---

٣ (٢٠٢٣) **(دور ثاني)** جد ناتج $\begin{bmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٢- & ٠ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ٨ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} - ٣و_٢$

الجواب: $\begin{bmatrix} ٠ & ٧- \\ ١٢ & ١٢- \end{bmatrix}$

---

٤ (٢٠٢٤) **(دور أول)** إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة س بحيث $أ + س = ب.س$

الجواب: س = $\begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix}$

---

٥ (٢٠٢٤) **(دور ثاني)** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ س & ٢- \end{bmatrix}$ ، $أ^٢ - ٣أ = ٧و_٢$ ، جد قيمة س؟

الجواب: س = −١

الدرس الثالث: المحـــددات

أولًا:- فك المحددة من الرتبة الثانية:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = أ_{11} \times أ_{22} - أ_{12} \times أ_{21}$

قيمة المحددة = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي.

ملاحظة:

المحدد لا يوزع على الجمع والطرح ← $|أ \pm ب| \neq |أ| \pm |ب|$

ملاحظة:

المحدد يتوزع فقط على الضرب ← $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

قواعـد هامـة: -

(١) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية فأن $|ك أ| = ك^{٢} |أ|$

(٢) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثالثة فإن $|ك أ| = ك^{٣} |أ|$

(٣) بشكل عام: – إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فأن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$

فك المحددة من الرتبة الثالثة ٣ × ٣:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = أ_{11} \begin{vmatrix} أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{21} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{33} \end{vmatrix} + أ_{31} \begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{vmatrix}$

059-488-5006

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-١)^{٤} & (-١)^{٣} & (-١)^{٢} \\ (-١)^{٥} & (-١)^{٤} & (-١)^{٣} \\ (-١)^{٦} & (-١)^{٥} & (-١)^{٤} \end{vmatrix} \Leftarrow$$

ملاحظة: إذا كان المحدد على صورة المصفوفة المثلثية العلوية

$$\begin{vmatrix} ١١^{أ} & ٢١^{أ} & ٣١^{أ} \\ ٠ & ٢٢^{أ} & ٣٢^{أ} \\ ٠ & ٠ & ٣٣^{أ} \end{vmatrix} = ١١^{أ} \times ٢٢^{أ} \times ٣٣^{أ}$$ ، نضرب عناصر القطر الرئيسي ببعضها.

خصائص المحددات: -

(١) إذا كانت جميع مدخلات أي صف أو عمود اصفاراً فإن قيمة المحدد = صفر

مثال: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = صـ فر ،

$$\text{صـ فر} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣- \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

(٢) يمكن أن نخرج عامل مشترك من أي صف أو عمود

مثال: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} \times ٢ = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

ملاحظة: يعد خلاف المصفوفات وكان العامل يسحب من جميع المدخلات.

(٣) عند تبديل أي صف مكان صف آخر، أو أي عمود مكان عمود آخر، نضرب المحدد بـ (-١)

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}(-١) = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}(-١) = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$$

---

(٤) إذا اضيف لمدخلات أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صف آخر أو عمود آخر فلا تتغير قيمة المحدد

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٦\times٤+٣ & ٥\times٤+٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix}$$

---

(٥) إذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أو عامودين في مصفوفة فأن محددها يساوي صفراً.

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

059-488-5006

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠٢٠) إذا كانت $\begin{vmatrix} أ & ب \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$ ، فما قيمة $\begin{vmatrix} ب & أ+٢ب \\ ٥ & ١٢ \end{vmatrix}$ ؟

أ) -٤٠ ب) -٢٠ جـ) ٢٠ د) ٤٠

---

٢ (٢٠٢٠) **(دور ثاني)** إذا كان $س = \begin{bmatrix} -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $|س.ص|$ ؟

أ) ٩ ب) -٩ جـ) ١ د) -١

---

٣ (٢٠٢٠) **(دور ثاني)** أي من الآتية تساوي $\begin{vmatrix} ١ & جاس \\ جتاس & ٠ \end{vmatrix}$ ؟

أ) جا٢س ب) $-$جا٢س جـ) $\frac{١}{٢}$جا٢س د) $\frac{-١}{٢}$جا٢س

---

٤ (٢٠٢٣) **(دور ثاني)** إذا كانت $\begin{vmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٦$ ، وكانت $\begin{vmatrix} س & -١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١$ ما مجموعة قيم س الممكنة؟

أ) $\{٢\}$ ب) $\{-٢\}$ جـ) $\{٢، -٢\}$ د) ϕ

---

٥ **(خارجي)** إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فأن $|س| + |ص| =$

أ) -١٦ ب) ٢١ جـ) ٦ د) -٦

---

٦ **(خارجي)** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ب^{٢} & ٥ \\ ب & ٥ \end{bmatrix}$ ، وكان $|٢أ|^{٢} = ١٦$ ، حيث $|أ| > ٠$ ، فما قيمة الثابت ب؟

أ) ٥٤ ب) ١٦ جـ) ٤ د) ٣

059-488-5006

٧ **(خارجي)** إذا كانت $\begin{vmatrix} أ٢ & ٢جـ \\ ٤ب & ٤ء \end{vmatrix} = -٨$، فما قيمة $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢}جـ & \frac{٣ء}{٢} \\ أ٢ & ٢ب \end{vmatrix}$ ؟

أ) ١ ب) −١ جـ) ٥ د) ٣

---

٨ **(خارجي)** إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ ، $|أ٢| = ١٢$ فأن قيمة س؟

أ) −١ ب) ١ جـ) ٢ د) −٤

أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢١) **(دور ثاني)** إذا كانت س مصفوفة مربعة وغير منفردة من الرتبة ٢ وكان

$س_{٢٢} = ك س_{١١}$، $س_{١١} \neq ٠$، احسب قيمة الثابت ك التي تجعل $|س + م^{-١}| = |س| + |م^{-١}|$

الجواب: -١

---

٢ (٢٠٢١) **(دور ثالث)** إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٣ & ٨ \\ ٠ & ٢ & ١٢ \\ ٠ & ١ & س \end{vmatrix} - ٨ \begin{vmatrix} ٤ & ٦ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ جد قيمة / قيم س

الجواب: $س = -٢، ٨$

---

٣ (٢٠٢٢) جد قيمة س بحيث يكون $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ س & ٠ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٤ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ س & ٩ \end{vmatrix} = -٣٤$

الجواب: $س = -\frac{٧}{٦}، ٥$

---

٤ (٢٠٢٠) **(دور ثاني)** إذا كان $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & س & ٠ \\ ٣ & ١ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٦$، فما قيمة س؟

الجواب: $س = -٢$

---

٥ (٢٠٢٣) **(دور أول)** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$، فجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة؟

$$س - أ^{٢} = |أ| م_{٢}$$

الجواب: $\begin{bmatrix} ٢٤ & -١٦ \\ -٦٤ & ٤٠ \end{bmatrix}$

---

٦ (٢٠٢٤) **(دور أول)** إذا كان أ مصفوفة من الرتبة ٣×٣، بحيث $أ_{يه} = \begin{cases} (ي - ٢ه)^{٢} & ، ي > ه \\ ١ & ، ي \leq ه \end{cases}$

1) اكتب المصفوفة أ؟

2) جد $|أ - م_{٣}|$؟

الجواب: 1) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٩ & ٢٥ \\ ١ & ١ & ١٦ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

2) 169

الدرس الرابع: النظير الضربي للمصفوفة المربعة

تعريـــف:

(١) إذا كان محدد المصفوفة المربعة = صفر فإن المصفوفة تسمى مصفوفة منفردة (ليست لها نظير ضربي).

(٢) إذا كان محدد المصفوفة المربعة ≠ صفر فأن المصفوفة تسمى مصفوفة غير منفردة (لها نظير ضربي)

ملاحظات هامة:

(١) اذا كان ا × ب = ب × ا = م ، فأن ا هي النظير الضربي للمصفوفة ب أو ب هي النظير الضربي للمصفوفة ا

(٢) إذا كانت ا مصفوفة منفردة فأن ا٢ ، ا٣ ، ا٤ ، ..... أيضًا مصفوفات منفردة.

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز أ$^{-١}$ ونكتب (ب = أ$^{-١}$) ويكون أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان | أ | = ٠

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

تذكير تسمى المصفوفة المربعة (أ) مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة (ب) من نفس الرتبة حيث أن ا × ب = ب × ا = م

فإن المصفوفة (ب) نظيراً ضربياً للمصفوفة (ا) ويرمز لها بالرمز ا$^{-١}$ وتكتب ب = ا$^{-١}$

ويكون ا×ا$^{-١}$ = ا$^{-١}$ ×ا = م

059-488-5006

قاعدة إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فأن: -

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times \begin{bmatrix} \text{(١) تبديل عناصر القطر الرئيسي} \\ \text{(٢) تغير إشارات القطر الفرعي} \end{bmatrix}$$

باختصار ⟸ أوجد المحدد ⟸ بدل أماكن ⟸ غير إشارات اللي ما تبدلو

قوانيـن هامـــة جداً

مثال

(١) إذا كان أ×ب = ب×أ = م، حيث أ،ب مصفوفتان مربعتان من نفس الرتبة فأن أ هي النظير الضربي لـ ب والعكس صحيح.

(٢) $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = م$

(٣) $|أ \times أ^{-١}| = |م| = ١$

(٤) $(أب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$ (نعكس الترتيب)

(٥) $(أبجـ)^{-١} = جـ^{-١} \times ب^{-١} \times أ^{-١}$ (نعكس الترتيب)

(٦) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

(٧) $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

(٨) $م^{-١} = م$

(٩) $(ك أ)^{-١} = \frac{١}{ك} أ^{-١}$

(١٠) $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$ ومنه $|أ| \times |أ^{-١}| = ١$

مثال

• ضع إشارة (✓) أو (✗) أمام كل عبارة مما يلي: -

(١) إذا كانت أ×ب = ب×أ فإن أ هي النظير الضربي لـ ب. ( )

(٢) إذا كانت أ مصفوفة منفردة فأن ٢أ أيضاً منفردة. ( )

(٣) $(أ \times ب)^{-١} = أ^{-١} \times ب^{-١}$ ( )

(٤) $|أ + ب| = |أ| + |ب|$ ( )

(٥) $|أ - ب| = |أ| - |ب|$ ( )

(٦) $(أ + ب)^{-١} = أ^{-١} + ب^{-١}$ ( )

(٧) $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ ( )

(٨) $(٢أ)^{-١} = ٢أ^{-١}$ ( )

(٩) $(١\frac{١}{٣}أ)^{-١} = ٣أ^{-١}$ ( )

(١٠) $(أ^{-١})^{٢} = (أ^{٢})^{-١}$ ( )

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠٢١) إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي ب + ب$^{-١}$؟

أ) و$_٢$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ١٤ \end{bmatrix}$ جـ) م$_٢$ د) ٦م$_٢$

---

٢ (٢٠٢١) ما العبارة الصحيحة من العبارات الآتية حيث أ، ب، جـ مصفوفات؟

أ) إذا كان |أ| = |أ$^{-١}$| فإن |أ| = ١ فقط ب) |ك أ| = ك^{٢} |أ| ع ∋ ك، |أ|

جـ) إذا كان أ.ب = أ.جـ فإن ب = جـ د) (٢م$_٢$) = ٤م$_٢$ حيث م$_٢$ مصفوفة الوحدة

---

٣ (٢٠٢١) إذا كانت س مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية بحيث س^{٢} − ٢س = و$_٢$، فما المصفوفة س من الآتية؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

---

٤ (٢٠٢١) **(دور ثاني)** إذا كانت أ مصفوفة مربعة منفردة، فما هي المصفوفة أ من الآتية؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

---

٥ (٢٠٢١) **(دور ثاني)** إذا كانت س مصفوفة غير منفردة من الرتبة ٢ بحيث س^{٢} = س، ما المصفوفة س بين الآتية؟

أ) س = س$^{-١}$ ب) س = م$_٢$ جـ) س = −م$_٢$ د) س = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

---

٦ (٢٠٢٢) إذا كانت س، ص مصفوفتين غير منفردتين، وكان ٢س = ص$^{-١}$ فما هي المصفوفة س ص؟

أ) ٢م$_{٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$م$_{٢}$ جـ) ٤م$_{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$م$_{٢}$

---

٧ (٢٠٢٣) **(دور أول)** ما مجموعة قيم س التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ منفردة؟

أ) {٠، ٤} ب) {٠، −٤} جـ) {٤، −٤} د) {٠}

---

٨ (٢٠٢٤) **(دور أول)** إذا كان ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وكان |ب| = −٢، فما قيمة $\left|\left(\frac{٣}{٢}ب\right)^{-١}\right|$ ؟

أ) $-\frac{٢٧}{٤}$ ب) $-\frac{٢}{٩}$ جـ) $\frac{٢}{٩}$ د) $-\frac{٤}{٢٧}$

---

٩ (٢٠٢٤) **(دور أول)** إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وكان |ب| = −٢، فما قيمة $\left|\left(\frac{٣}{٢}ب\right)^{-١}\right|$ ؟

أ) أ − م ب) أ^{٢} جـ) م − أ د) أ + م

---

١٠ (٢٠٢٤) **(دور ثاني)** إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وغير منفردة، وكان $|أ^{٢}| = |٦\sqrt{٢}|^{-١}$، فما قيمة |أ| ؟

أ) ٤ ب) ٦ جـ) ٢ د) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢٣) (دور أول) إذا كانت أ، ب مصفوفتين بحيث أن

$$\left(\frac{1}{6}(أ+ب)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}، \quad أ.ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ٦- & ٢ \end{bmatrix}، \quad ب.أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$$

جد $أ^{٢} + ب^{٢}$

الجواب: $\begin{bmatrix} ٥ & ٥- \\ ٩- & ٩ \end{bmatrix}$

---

٢ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان $(ب.أ^{-١})^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٩- \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$، $و = ٣م_{٢} - ٢$، حيث

أ، ب مصفوفتين، جد المصفوفة أ؟

الجواب: $\begin{bmatrix} ٧ & ٢٩ \\ ١٦- & ١٦- \end{bmatrix}$

---

٣ (٢٠٣٢) (دور ثاني) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١ & ك \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$، $\left(\frac{1}{2}أ\right)^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ك- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$، فما قيمة / قيم ك الممكنة؟

الجواب: ٢-

---

٤ (٢٠٢٤) (دور ثاني) إذا كانت $جـ = [١- \quad . \quad ٣]$. $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٧ \\ ٩- \end{bmatrix}$، وكان $|جـ| = \begin{vmatrix} ١ & س & ٣ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٢س & س \end{vmatrix}$،

جد قيمة س؟

الجواب: س = ٢

---

٥ (٢٠٢٤) (**دور أول**) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$، جد المصفوفة س ، علماً بأن

$$(أ.(س - ب))^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$ ؟

الجواب: $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ \frac{٧}{٢}- & ٤ \end{bmatrix}$

---

٦ (٢٠٢٤) (**دور ثاني**) إذا كان $س.\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} + س$، جد المصفوفة س؟

الجواب: $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

الدرس الخامس: حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

طرق الحل التي سندرسها

النظير الضربي	طريقة كريمر	طريقة جاوس

أولًا: - النظير الضربي: -

هذه النوع يكتفي فقط بحل نظام مكون من معادلتين بمجهولين.

➢ يجب تحويل المعادلات إلى شكل معادلة مصفوفية على الشكل الآتي أ .ك = جـ، حيث أن: -

أ: - مصفوفة العوامل لكل من س ، ص ك: - مصفوفة المتغيرات س ، ص

جـ: - مصفوفة النواتج (الأرقام اللي بتكون بعد اليساوي)

ثانياً: - طريقة كريمر: -

هذه الطريقة أسهل من سابقها وستقتصر على حل نظام مكون من معادلتين بمجهولين فقط.

طريقة الحل: - $س = \frac{|أ_س|}{|أ|}$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$

حيث أن: - $أ_س$: هي المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.

$أ_ص$: هي المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

ثالثاً: - طريقة جاوس: -

تمكننا هذه الطريقة من حل ثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل بطريقة بسيطة.

➢ تعتمد هذه الطريقة على اجراء بعض العمليات على الصفوف وأهمها هي: -

١) ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفر ٢) جميع أو طرح أي صفين.

٣) تبديل صف مكان الآخر.

والهدف من هذه العمليات هو تشكيل مصفوفة مثلثية علوية.

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠٢٢) عند حل نظام من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر وجد أن $أ_س \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٥٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٢- \\ ١١ \end{bmatrix}$ ، $س ص = ٣$ ، فما قيمة / قيم $|أ|$ ؟

أ) $-٣ ، ٣$ ب) ١ جـ) ٨١ د) $-٩ ، ٩$

---

٢ (٢٠٢٣) **(دور أول)** استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين في المتغيرين س، ص فوجد أن $|أ_س| = |١٢| = -٢|أ_س|$ ، علماً بأن $|أ| \neq ٠$ ، جد مجموعة حل النظام؟

أ) $\{(٤ ، -٢)\}$ ب) $\{(٢ ، -٤)\}$ جـ) $\{(٤ ، -١)\}$ د) $\{(١ ، -٤)\}$

---

٣ (٢٠٢٣) **(دور ثاني)** عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظلم مكون من معادلتين خطيتين احداهما $٣ص = ٤ - ٢س$، وجد $٢|أ_س| + ٣|أ_س| = ٨$ ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٤

---

٤ (٢٠٢٤) **(دور ثاني)** ما قيمة ص عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، علماً بأن $أ_س \cdot \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٦ \end{bmatrix} = ٤ أ_س \cdot \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- \\ ٢ \end{bmatrix}$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{٢٠}{٢٤}$ جـ) $\frac{٢٤}{٢٠}$ د) ٢

---

٥ **(خارجي)** عند حل نظام من المعادلتين الخطيتين (بواسطة قاعد كريمر) $أس + ٢س = ١$ ، $ب س + ص = ٣$ ، وجد أن $أ_س = \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، فما هي مصفوفة $أ_س$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \\ ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢٣) (دور أول) عند حل النظام $\begin{cases} ك س + ٢ ص = ب \\ ٣ س + ع ص = جـ \end{cases}$ بطريقة كريمر، وجد أن

$$أ_{س} أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$$ ، $$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$$ ، $ك ع - ٢ ل = ٢$ جد

١ - قيم س ، ص ٢ - اكتب نظام المعادلات المذكور في السؤال بعد إيجاد جميع الثوابت؟

الجواب: $س = ٣$ ، $ص = ١$

$٢س - ٤ص = ٢$
$-س + ٣ص = ٠$

---

٢ (٢٠٢٣) (دور أول) استخدم طريقة جاوس في حل النظام الاتي

$س - ص + ٥ع = ٠$ ، $٢س + ص + ع = ٠$، $ص - ع = ٤$؟

الجواب: $(-٤، ٦، ٢)$

---

٣ (٢٠٢٣) (دور أول) حل نظام المعادلات التالي:

$٢س - ٢ص = ٦$ ، $٦س - ٤ص = ١٦$ باستخدام طريقة النظير الضربي؟

الجواب: $(-١، ٢)$

---

٤ (٢٠٢٤) (دور أول) استخدم طريقة كريمر لحل النظام $٥س - أص = ٥$ ، $أس - ٥ص = أ$ ،

حيث $أ > ٥$؟

الجواب: $س = ١$
$ص = ٠$

---

٥ (٢٠٢٤) (دور ثاني) استخدم طريقة جاوس لحل النظام

$٦س + ص + ع = ٧$
$٣س - ٢ص + ٢ع = -٣$
$س + ص + ع = ٢$

الجواب: $س = ١$
$ص = ٢$
$ع = -١$