

مراجعة الوحدة الرابعة

الوحدة الرابعة: التكامل غير المحدود

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

تعريف:

- تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران $ق(س)$ بالتكامل غير المحدود للاقتران $ق(س)$ بالنسبة لـ $س$ ويرمز له بالرمز $\int ق(س) دس$ ويقرأ تكامل $ق(س)$ دال $س$.
- إذا كان $م(س) = ق(س)$ فإن $\int ق(س) دس = م(س) + ج$ حيث $ج$ ثابت. (ثابت التكامل).
- إذا كان $ق(س)$ اقتراناً متصلًا فإن $\frac{د}{دس} \int ق(س) دس = ق(س)$.

ملاحظة:

إذا كان $م(س)$ اقتراناً أصلياً للاقتران $ق(س)$ ، فإن $م(س) + ج$ هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران $ق(س)$ حيث $ج$ ثابت.

ملاحظة:

إذا كان $م(س)$ ، $ه(س)$ ، هما اقترانين أصليين للاقتران $ق(س)$ فإن:
حاصل طرحهما = مقدار ثابت، أي أن $م(س) - ه(س) = ج$

تعريف:

يسمى الاقتران $م(س)$ اقتراناً أصلياً للاقتران $ق(س)$ إذا كان

$$\int ق(س) دس = م(س) + ج$$

مثال

إذا كان ${}^2(s)$ ، هـ (s) اقرانين أصليين للاقتران ${}^1(s)$ فإن $({}^2 - 3هـ)$ (s) يساوي:

(أ) ${}^1(s)$ (ب) ${}^2(s)$ (ج) ${}^1(s)$ (د) ${}^2(s)$

مثال

إذا كان ${}^1(s)$ ، ${}^2(s)$ الاقرانين اصليين للاقتران ${}^1(s)$ الذي فيه، هـ $(s) = {}^1(s) - {}^2(s)$ فإن هـ $(1) = \dots$

مثال

إذا كان ${}^1(s)$ ، اقراناً متصللاً وكان ${}^1(s) = 3س - \frac{1}{3}س - 1$ ، فإن ${}^1(s)$ ، ${}^2(s)$.

مثال:

إذا كان ${}^1(s) = \frac{(s)}{3س}$ لـ $(هـ + هـ)$ جد ${}^1(s)$ ، ${}^2(s)$

مثال:

إذا كان ${}^3س = \frac{3}{5}س + ج$ ، جد قيمة ن.

مثال:

إذا كان ${}^2(s) = هـ$ لـ 2س ، وكان ${}^1(s) = هـ$ $(\frac{1}{س} + 2لـ)$ اثبت أن ${}^2(s)$ هو الاقتران الأصلي للاقتران ${}^1(s)$



الدرس الثاني: قواعد التكامل غير المحدود

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق

يرمز للتكامل بالرمز \int وعند اجراء التكامل للاقتران u (س) يرمز له بالرمز $\int u$ (س) يسقرأ تكامل u (س) دال س

سنأخذ أول قاعدتين في قواعد التكامل حتى نتمكن من التطبيق المباشر عليها:

$$(1) \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (2) \int \frac{x^m}{x^n} = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} + C$$

مثال:

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int x^7 = \frac{x^8}{8} + C \quad (2) \int x^{\pi} = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C \quad (3) \int x^2 = \frac{x^3}{3} + C$$

$$(4) \int x^4 = \frac{x^5}{5} + C \quad (5) \int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \quad (6) \int x^3 = \frac{x^4}{4} + C$$

ملاحظة:

إذا كان u (س) ، ه (س) اقتراين قابلين للتكامل فإن:

$$(1) \int u \cdot v = \int u \cdot \frac{dv}{v} + C, \quad v \neq 0$$

$$(2) \int u \pm v = \int u \pm \int v = \int u \pm \frac{dv}{v} + C$$

* التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة.



ملاحظة: ونصيحة اهم من الرأي الي فوق:

في أي سؤال تكامل لا تخترع قواعد جديدة من عندك وحاول وصل السؤال بطرق جبرية رياضية (بسّط السؤال) لتوصله لشكل القواعد الرئيسية والجاهزة.

ملاحظة (1):

لا يمكن اجراء التكامل بوجود عملية ضرب بين الحدود، نضرب ثم تكامل.

مثال:

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(2) \int 2s(s^2 + 3s + 5) ds$$

$$(1) \int 2(2 + 3s) ds$$

$$(4) \int (1 + 3s)(5 - s) ds$$

$$(3) \int (2 - s)(2 + s) ds$$

ملاحظة (2):

إذا كان التكامل يحتوي على بسط ومقام فأننا نفكر في التحليل.

مثال:

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(2) \int \frac{s^2 + 7s}{s + 7} ds$$

$$(1) \int \frac{s^2 - 6}{s - 4} ds$$

$$(4) \int \frac{s^3 - 8}{s - 2} ds$$

$$(3) \int \frac{s^2 + 4s - 21}{s + 7} ds$$



ملاحظة (3):

تكامل الاقترانات النسبية التي بسطها عدد ومقامها عبارة عن s^{ν} ، $\nu \neq 1$ ، على صورة $\frac{A}{s^{\nu}}$ نقوم برفع الاس الى البسط وتطبيق مباشر على القاعدة

ملاحظة (4):

أي حد عبارة عن $\sqrt[s]{A}$ نقوم بتحويله إلى اس ويصبح $s^{\frac{\nu}{s}}$ ، ثم تطبيق مباشر على القاعدة.

$$(1) \int s^3 - \frac{6}{s} ds \quad (2) \int \sqrt{s} ds$$

$$(3) \int \sqrt[s]{\frac{1}{s}} + \sqrt[s]{s} ds \quad (4) \int \frac{\sqrt{s} + \sqrt[3]{s}}{\sqrt{s}} ds$$

$$(5) \int \frac{(1 + \sqrt{s})(2 - \sqrt{s})}{s} ds \quad (6) \int \frac{\sqrt{s}(1 - s)}{1 + \sqrt{s}} ds$$

قاعدة $\int (A + B)s^{\nu} ds = \frac{(A + B)s^{\nu+1}}{\nu+1}$

مثال:

أوجد كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int (1 + s^2)^3 ds \quad (2) \int (s + 4)^4 ds$$

$$(3) \int s \left(\frac{1}{s} - 1 \right)^7 ds \quad (4) \int \sqrt[3]{1 - s^3} ds$$

$$(5) \int \sqrt{s} \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s} \right) ds \quad (6) \int \frac{(s^4 + 5s^2)^9}{s^9} ds$$

$$(7) \int \sqrt[3]{s^3 + 3} ds \quad (8) \int (1 + s) \sqrt[3]{s^2 + 2s + 1} ds$$



تكمال الاقتران اللوغاريتمي:

$$(1) \left[\frac{1}{s} \cdot \log |s+1| = \log |s+1| \right], s \neq 0$$

$$(2) \left[\frac{(s)^n}{(s)} \cdot \log |s+1| = \log |s+1| \right], n \neq 0$$

* جد كلاً من التكمالات الآتية:

$$(2) \left[\frac{1}{1+s^2} \right]$$

$$(1) \left[\frac{s^3}{s^2+3} \right]$$

$$(4) \left[\frac{s}{s^3+4} \right]$$

$$(3) \left[\frac{s}{s-4} \right]$$

$$(6) \left[\frac{s^3+2s^2+5}{s^3+s^2+5} \right]$$

$$(5) \left[\frac{1+s}{s^2+2} \right]$$

$$(8) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(7) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(10) \left[\frac{s+3}{s-3} \right]$$

$$(9) \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$(12) \left[\frac{s^3+5}{s} \right]$$

$$(11) \left[\frac{2s^2+3}{s} \right]$$

$$(14) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(13) \left[\frac{s}{s} \right]$$

$$(16) \left[\frac{1}{s+b} \right]$$

$$(15) \left[\frac{8}{s^2-3} \right]$$

$$(18) \left[\frac{4s^2+4}{s} \right]$$

$$(17) \left[\frac{3s-5}{s} \right]$$



الاقتران الاسي:

(١) $\left[\text{ه}^{\text{س}} \cdot \text{س} = \text{ه}^{\text{س}} + \text{ج} \right]$

(٢) $\left[\text{ه}^{\text{س}+\text{ب}} \cdot \text{س} = \frac{1}{\text{ه}}^{\text{س}+\text{ب}} + \text{ج} \right]$

(٣) $\left[\text{ه}^{\text{س}^4-1} \cdot \text{س} \right]$

(٤) $\left[\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2} + \frac{3}{\text{س}^2} \cdot \text{س} \right]$

(٥) $\left[\text{ه}^{\frac{\text{س}^5 - \text{س}^3}{\text{س}^6}} \cdot \text{س} \right]$

(٦) $\left[\text{ه}^{\frac{\text{س}^5 + \text{س}^7}{\text{س}^3 + \text{س}^2}} \cdot \text{س} \right]$

(٧) $\left[\text{ه}^{\frac{8 - \text{س}^3}{2 - \text{س}}} \cdot \text{س} \right]$

(٨) $\left[\text{ه}^{\frac{(\text{ه}^{\text{س}} - 2)^{\text{س}}}{4 - \text{س}^2}} \cdot \text{س} \right]$

(٩) $\left[\text{ه}^{\frac{1 - \text{س}^4}{1 - \text{س}}} \cdot \text{س} \right]$

(١٠) $\left[\text{س} \cdot \frac{\text{ه}^{\text{س}} + \text{ه}^{-\text{س}}}{\text{ه}^{\text{س}} - \text{ه}^{-\text{س}}} \right]$

(١١) $\left[(\text{ه}^{\text{س}^2} - \text{ه}^{\text{س}})^2 \cdot \text{س} \right]$

(١٢) $\left[\text{ه}^{\frac{1}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^2}} + \text{س} \right]$

تكمال الاقتران المثلية:

(١) $\left[\text{جاس} \cdot \text{س} = -\text{جتاس} + \text{ج} \right]$

(٢) $\left[\text{جتاس} \cdot \text{س} = \text{جاس} + \text{ج} \right]$

(٣) $\left[\text{قا}^{\text{س}} \cdot \text{س} = \text{ظاس} + \text{ج} \right]$

(٤) $\left[\text{قتا}^{\text{س}} \cdot \text{س} = -\text{ظتاس} + \text{ج} \right]$

(٥) $\left[\text{قاس} \cdot \text{ظاس} \cdot \text{س} = \text{قاس} + \text{ج} \right]$

(٦) $\left[\text{قتاس} \cdot \text{ظتاس} \cdot \text{س} = -\text{قتاس} + \text{ج} \right]$

ملاحظة (٥):

إذا كانت الزاوية عبارة عن اقتران خطي فقط، فإن

$$\left[\text{جا}(\text{ا} + \text{ب}) \cdot \text{س} = \frac{1}{\text{ا}} \cdot \text{جتا}(\text{ا} + \text{ب}) + \text{ج} \right]$$



ملاحظة (6):

كل ما ينطبق على الجيب ينطبق على باقي الاقترانات المثلثية.

متطابقات لازم تحفظها وتبصمها وتفهم كيف ومتى تستخدمها

$$(1) \text{ جا}^2 \text{ س} = \frac{1}{\text{ق}^2} (1 - \text{جتا}^2 \text{ س})$$

$$(2) \text{ جتا}^2 \text{ س} = \frac{1}{\text{ق}^2} (1 + \text{جتا}^2 \text{ س})$$

$$(3) \text{ جا}^2 \text{ س} = 2 \text{ جا س جتا س}$$

$$(4) \text{ جتا}^2 \text{ س} = \text{جتا}^2 \text{ س} - \text{جا}^2 \text{ س}$$

بقدر اشتقهم من (1) و (2)

$$1 - \text{جتا}^2 \text{ س}$$

$$2 \text{ جا}^2 \text{ س} - 1$$

$$1 - 2 \text{ جتا}^2 \text{ س}$$

$$\text{قا}^2 \text{ س} = \text{ظا}^2 \text{ س} + 1$$

$$(5) \text{ ظا}^2 \text{ س} = \text{قا}^2 \text{ س} - 1$$

$$\text{قتا}^2 \text{ س} = \text{ظتا}^2 \text{ س} + 1$$

$$(6) \text{ ظتا}^2 \text{ س} = \text{قتا}^2 \text{ س} - 1$$

$$(7) \text{ جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س} = 1$$

مثال:

جد كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 2 \text{ جتا}^2 - 2 \text{ س} \text{ دس}$$

$$(2) \int 5 \text{ ظا}^2 \text{ س} + 1 \text{ دس}$$

$$(3) \int (\text{جا س} + \text{جتا س})^2 \text{ دس}$$

$$(4) \int 2 \text{ ظا}^2 \text{ س} - 3 \text{ ظتا}^2 \text{ س} \text{ دس}$$

$$(5) \int \text{جا س جتا س} \text{ دس}$$

$$(6) \int \text{جا} \frac{\text{س}}{\text{ق}} \text{ جتا} \frac{\text{س}}{\text{ق}} \text{ دس}$$

$$(7) \int \frac{1}{\text{جتا}^2 \text{ س} + 1} \text{ دس}$$

$$(8) \int \frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جتا}^2 \text{ س}} \text{ دس}$$

$$(9) \int \frac{\text{قا}^3 \text{ س} + \text{ظا س}}{\text{قاس}} \text{ دس}$$

$$(10) \int 2 \text{ جا س جا}^2 \text{ س} \text{ دس}$$



ملاحظة (7):

يوجد بعض التكاملات التي تحتاج إلى الضرب بالمرافق مثل: $(1 \pm جاس)$ ، $(1 \pm جتاس)$ ، $(قاس \pm 1)$

مثال:

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int \frac{1}{جاس-1} ds \quad (2) \int \frac{جتاس}{جاس+1} ds \quad (3) \int \frac{1}{قاس-1} ds$$

أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

١ (٢٠٢٠) (دور ثاني) ما ناتج $\int \frac{س-1}{س-1} ds$ ؟

(أ) $\frac{2}{3}س + \frac{2}{3}ج$ (ب) $\frac{2}{3}س + \frac{2}{3}ج$ (ج) $-\frac{2}{3}س + \frac{2}{3}ج$ (د) $\frac{3}{2}س + \frac{2}{3}ج$

٢ (٢٠٢٠) (دور ثالث) ما ناتج $\int (جتاس-جاس) ds$ ؟

(أ) $جتاس+ج$ (ب) $\frac{1}{2}جاس+ج$ (ج) $-\frac{1}{2}جاس+ج$ (د) $\frac{1}{2}جتاس+ج$

٣ (٢٠٢١) (دور أول) إذا كان $س$ (س) هو اقتران اصلي للاقتران $ص$ (س) المتصل في مجاله بحيث:

$$\int \left[ص(س) + \frac{(ك-3)}{2(1-س)} \right] ds = س(س) + \frac{4}{1-س}$$

فما قيمة الثابت ك؟

(أ) 8- (ب) 2- (ج) 2 (د) 8

٤ (٢٠٢١) (دور ثاني) أي من الآتية يساوي $\int (س-1)(س+1)(س+1) ds$ ؟

(أ) $س-س+ج$ (ب) $س-\frac{1}{5}س+ج$ (ج) $س-1+ج$ (د) $س+\frac{5}{3}س+ج$



٥ (٢٠٢٣) (دور أول) ما ناتج $\left[\frac{1}{\text{جتاس}^2} - \text{ه}^2 \right]$ دس ، حيث ه العدد النيبيري؟

- (أ) $\frac{\text{ه}^3}{3} + \text{ظاس} + \text{ج}$ (ب) $\text{ه}^2 - \text{ظاس} + \text{ج}$ (ج) $\text{ه}^2 + \text{ظاس} + \text{ج}$ (د) $\text{ه}^2 + \text{ظاس} + \text{ج}$

٦ (٢٠٢٣) (دور أول) إذا كان $\left[\text{و}(\text{س}) \text{جاس} \cdot \text{دس} = \text{و}(\text{س}) \text{جتاس} + \text{و}(\text{س}) \text{جتاس}^2 \right]$ دس ، فما قاعدة

الاقتران $\text{و}(\text{س})$ حيث $\text{س} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ ؟

- (أ) س^3 (ب) $\text{س}^2 + \text{ج}$ (ج) $-\text{س}^3$ (د) $-\text{س}^3 + \text{ج}$

٧ (٢٠٢٤) (دور أول) إذا كان $\text{م}(\text{س})$ اقترانا اصليا للاقتران $\text{و}(\text{س})$ المتصل على مجاله وكان

$\text{م}^2(\text{س}) - \text{و}(\text{س}) = \text{دس} = \text{س} \text{دس}$ ، فما قيمة $\text{و}(\text{ع})$ ؟

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ١ (د) صفر

٨ (٢٠٢٤) (دور ثاني) ما قيمة $\left[\text{قاس}(\text{قاس} + \text{ظاس}) \right]$ دس ؟

- (أ) $\text{قاس}^2 + \text{ج}$ (ب) $\text{قاس}^2 + \text{س} + \text{ج}$ (ج) $\text{قاس} + \text{ظاس} + \text{ج}$ (د) $\text{ظاس} + \text{ج}$

٩ (٢٠٢٤) (دور ثالث) إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \text{عس} - \text{ه}$ هو الاقتران الأصلي للاقتران المتصل ه $\text{و}(\text{س})$ ، وكان

$\text{و}(\text{س}) - \text{م}^2(\text{س}) = \text{س} \text{ه} \text{و}(\text{س})$ ، أي من الاقترانات التالية تمثل الاقتران $\text{و}(\text{س})$ ؟

- (أ) $10 - \text{س} + 8$ (ب) $10 - \text{س} - 8$ (ج) $10 + \text{س} + 12$ (د) $10 - \text{س} - 12$

٨ (٢٠٢٤) (دور ثالث) جد $\left[\frac{\text{ه}^{\text{و}(\text{س})}}{\text{ه}^{\text{و}(\text{س})}} \right]$ دس ؟

- (أ) $\text{ه}^{\text{و}(\text{س})} + \text{ج}$ (ب) $\frac{\text{ه}^3}{3} + \text{ج}$ (ج) $\text{ه}^2 + \text{س} + \text{ج}$ (د) $\text{ه}^{\text{و}(\text{س})} + \text{ج}$



أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠١٩) (دور ثالث) إذا كان $\left[\cos(x) + \sin(x) = 2s \right]$ و $s = 6 - 2$ ، وكان $\cos(x) = 6$ ، فما

قيمة الثابت ؟

الجواب: ٣

٢ (٢٠٢٠) (دور أول) إذا علمت أن $\left[\cos(x) + \sin(x) = 2s \right]$ و $s = 2$ (ظاس قاس)،

حيث $s \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ، اثبت أن $\cos(x) = 2$ ظاس

الجواب: يترك للطلبة

٣ (٢٠٢١) (دور ثاني) إذا كان $\left[\cos(x) = 2s \right]$ و $s = 2 + \sin(x) + \cos(x)$

وكان $\cos(x) = 2$ ، و $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ، فجد الثابتين أ، ب

الجواب: أ = ٢
ب = ٣

٤ (٢٠٢٣) (دور ثاني) إذا كان $\left[\cos(x) = 2s \right]$ و $s = 3 - \sin(x) + \cos(x)$ ، فما قيمة $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ؟

الجواب: ٣-



الدرس الثالث: تطبيقات التكامل غير المحدود

أولاً: - تطبيقات هندسية: -

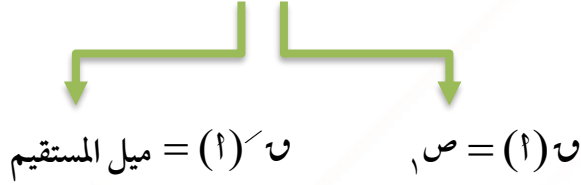
ملاحظة هامة:

$$(1) \int u^k (u) du = \frac{u^{k+1}}{k+1} \quad (k \neq -1)$$

$$(2) \int u^k (u) du = \frac{u^{k+1}}{k+1} \quad (k \neq -1)$$

$$(3) \text{ المنحنى يمر بالنقطة } (a, b) \leftarrow \int u^k (u) du = b$$

$$(4) \text{ المستقيم يمس منحنى الاقتران عند } s = a$$



$$(5) \text{ ميل المماس عند أي نقطة للاقتران } \int u^k (u) du \text{ لازم أفهم أنه: -}$$

$$\int u^k (u) du = \text{العلاقة المعطاة بالسؤال.}$$

$$(6) * \text{ عند النقطة الحرجة العظمى أو الصغرى}$$

$$\int u^k (u) du = \text{صفر.} \quad * \text{ المماس يوازي محور السينات}$$

$$* \text{ الاقتران يمس محور السينات}$$

$$(7) \text{ عند النقطة الانعطاف } \leftarrow \int u^k (u) du = \text{صفر.}$$

ثانياً: - تطبيقات فيزيائية: -

قوانين هامة:

$$(1) \int u^k (u) du = \frac{u^{k+1}}{k+1} \quad (k \neq -1)$$

$$(2) \int u^k (u) du = \frac{u^{k+1}}{k+1} \quad (k \neq -1)$$

ملاحظات هامة

$$(1) \text{ السرعة الابتدائية هي السرعة عندما } n = \text{صفر}$$

$$(2) \text{ نقطة الأصل } (0, 0) \leftarrow \int u^k (u) du = 0$$

$$(3) \text{ بداية الحركة } \leftarrow n = \text{صفر}$$

$$(4) \text{ يبدأ الجسم الحركة من السكون } \leftarrow \int u^k (u) du = 0, \quad \int u^k (u) du = 0$$



أسئلة وزارية شاملة / ضع دائرة

- ١ (٢٠١٩) (دور ثاني) بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة $v = 6t + 2$ ، فما بعده عن نقطة الأصل بعد اثنتين من بدء الحركة؟
- (أ) ٢٠ م (ب) ١٢ م (ج) ١٤ م (د) ١٦ م

- ٢ (٢٠١٩) (دور ثاني) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = (s)$ عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{s^2}{s^2 + 4}$ ، فما قاعدة $v = (s)$ علماً أن منحناه يمر بالنقطة $(3, 0)$ ؟

- (أ) $لور(س + ٢) + ٣$ (ب) $لور(س + ٢) + ٤$
(ج) $لور(س + ٢) + ٢$ (د) $لور(س + ٢) - ٢$

- ٣ (٢٠٢٠) (دور ثاني) رسم مماس لمنحنى الاقتران $v = (s)$ عند النقطة $(س، ص)$ فكان ميل العمود على المماس عند نقطة التماس يساوي $\sqrt{1 - س}$ ، فما قيمة $v = (٣ -)$ علماً أن $v = (٠) = ١$ ؟
- (أ) ٣ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ١ -

- ٤ (٢٠٢٠) (دور ثاني) تحرك جسم في خط مستقيم بتسارع يعطى بالعلاقة $t = (٣ - ٧٢) / ٢$ ، فإذا كانت سرعته الابتدائية $٣ / ٢$ ، فما سرعة الجسم بعد ٤ ثوان؟
- (أ) $٢ / ٢٢$ (ب) $٢ / ٢٤$ (ج) $٢ / ٢٧$ (د) $٢ / ٢٥$

- ٥ (٢٠٢٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = (س)$ عند أي نقطة عليه يساوي $٣س٣$ ، وكانت $v = (٢) = ٥$ ، فما قيمة $v = (٣)$ ؟
- (أ) ٦ - (ب) ٣ - (ج) ٢٤ (د) ٢٧



٦ (٢٠٢٣) (دول أول) يتحرك جسم بحيث تعطي سرعته بالعلاقة $v = 4t^2$ ، إذا كانت إزاحة الجسم v عند بداية الحركة تساوي 4 م، فما قاعدة v ؟

أ) $v = 4t^2 + 4$ ب) $v = 4t^2 - 4$

ج) $v = \frac{1}{4}4t^2 + 4$ د) $v = \frac{1}{4}4t^2 - 4$

٧ (٢٠٢٣) (دول ثاني) إذا كان ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الاقتران v (س) يساوي $3s^2 - 5$ وكان $v = 3$ ، فما قيمة v (١)؟

أ) ٢ ب) ١- ج) ١ د) ٢-

أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢٣) (دول أول) ليكن كلا من v (س) ، v (س)، اقترانين موجبين وقابلين للتكامل بحيث $v' = (س) - (س) - (س) - (س)$ ، $v' = (س) - (س) - (س) - (س)$ ، وكان $v = 1$ ، $v = 0 = 5$ (١) اثبت ان $v = (س) + (س) = 6$ (٢) جد قاعدة الاقتران v (س)؟

الجواب: $v = |3 - (س)| = 2s^2$

٢ (٢٠٢٣) (دول أول) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران v (س) عند النقطة $(0, 2)$ الواقعة عليه يساوي 3 ، وكان $v = (س) - 3 - 4س$ ، فجد قاعدة الاقتران v (س)؟

الجواب: $v = (س) = \frac{3}{4}s^2 - \frac{2}{3}s^3 + 3س + 2$

٣ (٢٠٢٣) (دول ثاني) تحرك جسم في خط مستقيم من نقطة الأصل مبتعدا عنها بسرعة ابتدائية مقدارها $2/3$ م/ث، فإذا كان تسارع الجسم في أي لحظة يساوي $6\sqrt{2}$ م/ث^٢، فجد كل مما يلي:
١. سرعة الجسم بعد (٥) ثواني من بدء الحركة؟
٢. المسافة التي يقطعها الجسم خلال الثواني الخمس الأولى من بدء الحركة

الجواب: (١) ٧٨ (٢) ١٤٠



٤ (٢٠٢٣) (دور ثالث) إذا كان $٢(س)$ اقتراناً أصلياً موجباً للاقتران $٧(س)$ ، فإذا كان الاقتران $٢(س)$ يمر بالنقطة $(٥، ٥)$ ، وكان $٢(س) = ٢س - ٧(س)$ ، بين أن $٧ = (٣)٢ - (٤)٢$ هـ

الجواب: يترك للطلبة

٥ (٢٠٢٤) (دور أول) تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) ومبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية تساوي $(٢٥/ت)$ ، فإن كان تسارعه في أي لحظة يعطى بالعلاقة $٢(٧ + ٣) = (٧)٢$ ، والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة (١٨ م)، جد المسافة التي يقطعها الجسم خلال (٤) ثواني من بدء الحركة؟

الجواب: ٦٨ م

٦ (٢٠٢٤) (دور ثاني) إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $٧(س)$ عند أي نقطة عليه $(س، ص)$ يساوي $\left(\frac{\sqrt{١-س}}{١+س}\right)$ ، $٠ < س$ ، جد قاعدة الاقتران $٧(س)$ علماً بأنه يمر بالنقطة $\left(\frac{٢}{٣}، ١\right)$ ؟

الجواب: $٧(س) = \frac{٢}{٣} - \sqrt{١-س} + ٢\sqrt{١-س}$

٧ (٢٠٢٤) (دور ثاني) انطلق المتسابقان علي ومحمد معا من السكون في مسابقة العدو لمسافة (١٠٠) متر، وكانت سرعة علي تتحدد بالعلاقة $١(٧) = ٧/٢$ ت، وسرعة محمد تتحدد بالعلاقة $٤(٧) = \left(\frac{٣}{٢}\right)٧/٢$ ت، جد زمن وصول كل منهما نهاية السباق، وحدد أيهما قطع مسافة السباق أولاً؟

الجواب: زمن علي = $\sqrt{٢٠٠}$

زمن محمد = $\sqrt[٣]{٢٠٠}$

محمد قطع مسافة السباق أولاً



الدرس الرابع: طرق التكامل

في هذا الدرس الأخير وهو الأطول في هذه الوحدة يوجد عنا ٣ طرق واستراتيجيات هي الأشهر في عالم التكامل وهو:

(١) التكامل بالتعويض (٢) التكامل بالأجزاء (٣) التكامل بالكسور الجزئية

* والطريقة الثانية وهي التكامل بالأجزاء معتمدة اعتماداً مطلقاً وكلياً على فهم الطريقة الأولى والتمكن منها وهي التكامل بالتعويض لذلك سوف نتعمق في أفكار وأشكال الطريقة الأولى لتسهيل فهم بقية الطرق.

أولاً: - التكامل بالتعويض: -

* فكرة هذه الطريقة انه يكون عندي بالسؤال موجود الاقتران وموجودة مشتقته ايضاً. والفكرة من طريقة التعويض هي تبسيط السؤال حتى نرجعه على القواعد المباشرة للتكامل.

توضيح: $\int u^n (u) du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

نفرض: $\int u^n (u) du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int u^2 (u) du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{3} + C$

* أهم معلومة لازم تطبعها بمخك هي انه: الشغلتين اللي لازم اهتم فيهم واستبدلهم واجهزهم همة

ع = دس:

أشهر الاشكال التي تحل باستخدام التعويض:

(١) اقتران مثلثي زاويته غير خطية.

جا(س^٢)، جتاها، ظا(س^٢ + ٥س)، جا(س).....

الحل: نفرض الزاوية كاملة = ع = الزاوية كاملة.



(٢) اقتران اسي والاس اقتران غير خطي:

$$س^٢ هـ ، جاس هـ ، \sqrt{اسه} هـ ، (س) هـ$$

الحل: نفرض ع = الاس كامل

(٣) [اقتران) ن . (اقتران) أ. دس

الحل: نفرض ع = ما داخل القوس صاحب القوة الأكبر.

$$(٤) [(اقتران) قوة . (اقتران) . دس] \text{ أو } [\frac{(اقتران)}{(اقتران) قوة} . دس]$$

الحل:

(١) نفرض ما تحت القوة الأكبر.

(٢) تحليل ما داخل القوة الأكبر ربما يكون مربع كامل.

(٣) سحب عامل مشترك يتلاءم مع السؤال.

$$(٥) [\sqrt{اقتران} \times (اقتران) . دس] \text{ أو } [\frac{(اقتران)}{\sqrt{اقتران}} . دس]$$

الحل:

(١) نفرض ما داخل الجذر

(٢) تحليل الداخلة ربما يكون مربع كامل.

(٣) سحب عامل مشترك يتلاءم مع السؤال

(٤) نفرض الجذر نفسه.



تكاملات خاصة بالتعويض للاقترنات المثلثية:

(١) $[جا^٢ س.س، [جتا^٢ س.س.س، حيث ن: عدد زوجي$

نستخدم المتطابقات: أ) $جتا^٢ س = \frac{1}{٢} (جتا^٢ س + ١)$

ب) $جا^٢ س = \frac{1}{٢} (جتا^٢ س - ١)$

(٢) $[جا^٢ س.س، [جتا^٢ س.س.س، حيث ن: عدد فردي$

نستخدم متطابقة $جا^٢ س + جتا^٢ س = ١$ ← $جا^٢ س = ١ - جتا^٢ س$
 $جتا^٢ س = ١ - جا^٢ س$

(٣) $[جا^٢ س جتا^٢ س.س ← يوجد ٣ حالات:$

(أ) ن: فردي، م: فردي ← نفرض صاحب الاس الأكبر.

(ب) ن: فردي، م: زوجي أو العكس ← نفرض صاحب الاس الزوجي.

(ج) ن: زوجي، م: زوجي ← متطابقات $جا^٢ س = \frac{1}{٢} (جتا^٢ س - ١)$

$جا^٢ س = \frac{1}{٢} (جتا^٢ س + ١)$

(٤) $[قا^٢ س ظا^٢ س.س: يوجد حالتين:$

وقيمة "م" ما رح تفرض بالحل سواء عدد زوجي أو فردي

(أ) ن: عدد فردي ← نفرض $ص = قاس$

(ب) ن: عدد فردي ← نفرض $ص = ظاس$



ثانياً: - التكامل بالأجزاء: -

هاض شرح بسيط بيوضح من وين اجت هاي الطريقة وموضح بالشرح على البطاقة بطريقة فهمية بحت.

$$\frac{د}{دس} (ق \times ع) = ق \times \frac{دع}{دس} + ع \times \frac{دق}{دس} \text{ حيث } ق، ع \text{ اقترانات قابلة للاشتقاق.}$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:

$$ق \times ع = ق \times دع + ع \times دق \dots\dots$$

$$\text{ومنها } ق \times دع = ع \times دق - ع \times دع$$

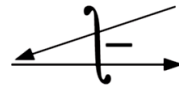
قاعدة:

$$\text{قاعدة التكامل بالأجزاء: } ق \times دع = ع \times دق - ع \times دع$$

مثال: جد $\int س جتاس دس$

$$دع = جتاس دس$$

$$ع = جاس$$



الحل: نفرض أن: $ق = س$

$$دق = دس$$

وحسب القاعدة $ق \times دع = ع \times دق - ع \times دع$

$$\text{يكون } \int س جتاس دس = \int س جاس - ع \times دق = \int س جاس + جتاس + ج - ع \times دق$$

ملاحظات مهمة جداً جداً:

(١) الاقتران الاسهل على أي اشتقه او الاقتران الذي يسهل اشتقاقه هو اللي رح نفرضه ق ← فيها بخط

(٢) الاقتران اللي سهل على تكامله رح نفرضه دع ← أكبر من باقي الكلام



حالات واشكال التكامل بالأجزاء الأكثر شهرة

$$(1) \int \text{كثير حدود} \times (اس + ب) \cdot \sqrt[ن]{اس} \, dx$$

$$(2) \int \text{كثير حدود} \times \sqrt[ن]{\frac{جاس}{جتاس}} \cdot \text{كثير حدود} \times \text{مثلثي} \, dx$$

$$(3) \int \text{كثير حدود} \times \sqrt[ن]{لوغاريتمي} \cdot \text{كثير حدود} \, dx$$

$$(4) \int \text{كثير حدود} \times \sqrt[ن]{اس + ب} \cdot \text{كثير حدود} \, dx$$

$$(5) \int \text{كثير حدود} \times \text{أسي} \cdot \sqrt[ن]{هـ} \cdot \text{كثير حدود} \, dx$$

$$(6) \int \text{أسي} \times \text{مثلثي} \cdot \text{كثير حدود} \, dx$$

$$(7) \int \sqrt[ن]{لو} \times \text{اقتران آخر أو لوحده} \cdot \text{كثير حدود} \, dx \text{ (دائماً نفرض } ق = \text{ الاقتران اللوغاريتمي).}$$

الأولوية في فرض ق يكون حسب الترتيب:

(1) اللوغاريتم (2) كثير الحدود (3) مثلثي

(4) اسي (5) خطي تحت الجذر $\sqrt[ن]{اس + ب}$

ملاحظة:

إذا كانت الزاوية أو ما داخل اللوغاريتم أو الاقتران الاسي ليس خطياً \iff تعويض ثم أجزاء ^{الحل}

قاعدة وشكل اخر من اشكال التكامل

$$\int \sqrt[ن]{هـ} \cdot \text{كثير حدود} \, dx = \sqrt[ن]{هـ} \cdot \text{كثير حدود} + \frac{\sqrt[ن]{هـ}}{ن} \cdot \text{كثير حدود} + \dots$$



حالات واشكال التكامل بالأجزاء الأكثر شهرة

$$(1) \int \text{كثير حدود} \times (اس + ب)^\sim \text{د.س}$$

$$(2) \int \text{كثير حدود} \times \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \right) \text{د.س} \dots \dots \text{كثير حدود} \times \text{مثلثي}$$

$$(3) \int \text{كثير حدود} \times \text{لوغاريتمي} \text{د.س}$$

$$(4) \int \text{كثير حدود} \times \sqrt{اس + ب} \text{د.س}$$

$$(5) \int \text{كثير حدود} \times \text{أسي} \left(ه \right) \text{د.س}$$

$$(6) \int \text{أسي} \times \text{مثلثي} \text{د.س}$$

$$(7) \int \left(لو \right)^\sim \times \text{اقتران آخر أو لوحده} \text{د.س} \text{ (دائماً نفرض } ق = \text{الاقتران اللوغاريتمي)}.$$

الأولوية في فرض ق يكون حسب الترتيب:

(1) اللوغاريتم (2) كثير الحدود (3) مثلثي

(4) اسي (5) خطي تحت الجذر $\left(\sqrt{اس + ب} \right)$.

ملاحظة:

إذا كانت الزاوية او ما داخل اللوغاريتم أو الاقتران الاسي ليس خطياً $\xleftarrow{\text{الحل}}$ تعويض ثم أجزاء

قاعدة وشكل اخر من اشكال التكامل

$$\int ه^س (س)^\sim + (س)^\sim \text{د.س} = ه^س (س)^\sim + ج$$



ثالثاً: - التكامل بالكسور الجزئية: -

* فكرة واليه عمل هذه الطريقة يمكن ايضاحها في مثال بسيط.

$$\frac{13 + 7s}{(4 + s)(1 - s)} = \frac{(1 - s)3 + (4 + s)4}{(4 + s)(1 - s)} = \frac{3}{4 + s} + \frac{4}{1 - s}$$

$$\frac{13 + 7s}{(4 + s)(1 - s)} = \frac{3}{4 + s} + \frac{4}{1 - s} \therefore$$

$$\frac{3}{4 + s} + \frac{4}{1 - s} \leftarrow \frac{13 + 7s}{(4 + s)(1 - s)} \text{ طيب لو حكيتك رجع}$$

أكد مارح تعرف تفصلهم وترجعه زي قبل فمن هون اجت فكرة الأجزاء:

$$\frac{13 + 7s}{(4 + s)(1 - s)} = \frac{b}{4 + s} + \frac{a}{1 - s} \text{ عن طريق هذه الفرض بعد ما اطلع قيمة أ، ب رح يرجع}$$

السؤال زي قبل وقيمة أ = 4، ب = 3، ورح نشوف كيف طلعتنا قيمة كل من أ، ب

ملاحظات:

إذا كان $\frac{u(s)}{h(s)}$ س. فإن:

(1) إذا كانت درجة $u(s) \leq$ درجة $h(s)$ فإننا:

* نستخدم طريقة القسمة الطويلة.

* ثم نستخدم طريقة الكسور الجزئية إذا لزم الأمر

(2) إذا كانت درجة المقام $h(s) <$ درجة البسط $u(s)$ فإننا نستخدم الكسور الجزئية مباشرة.



أسئلة وزارية / مقالي

١ (٢٠٢٢) (دور أول) جد: $\left[(س + ١) (س + ٢ + ٣ + ٤) س^٤ \right]$

الجواب: $\frac{١}{٢} (س + ٢ + ٣ + ٤) - \frac{١}{١٠} (س + ٢ + ٣ + ٤) + ج$

٢ (٢٠٢٢) (دور ثاني) جد: $\left[ظا^٥ س قاس س \right]$

الجواب: $\frac{١}{٥} قاس^٥ - \frac{٢}{٣} قاس^٣ + قاس + ج$

٣ (٢٠٢٢) (دور ثاني) جد: $\left[(س + ٢) (س + ٤) (س + ٦) (س + ٨) س \right]$

الجواب: $\frac{٢}{٧} (س + ٢) - \frac{٧}{٣} (س + ٢) + \frac{٣}{٢} (س + ٢) + ج$

٤ (٢٠٢٣) (دور أول) جد: $\left[ما س^٢ (س + ٢) (س + ٤) س ، علما بأن س < ٠ \right]$

الجواب: $-\sqrt{١ + \frac{١}{س}} + ج$

٥ (٢٠٢٤) (دور أول) جد: $\left[جا^٩ س قاس س \right]$ الجواب: $\frac{ظا^١٥ س}{١٠} + ج$

٦ (٢٠٢٤) (دور أول) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $٧(س)$ عند أي نقطة عليه تحقق القاعدة

لورنر $(جا^٢ س \times ٧(س)') = ظتا س$ ، جد قاعدة الاقتران $٧(س)$ علما بأن منحنى الاقتران $٧(س)$

يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$ ، $س \in]٠ ، \pi[$ ؟

الجواب: $٧(س) = ه - ظتا ه + ١ + ج$



١٣ (٢٠٢٢) (دور ثالث) جد: $\left[\text{جا } \sqrt{s+1} \right] \text{ د.س.}$

الجواب: $\frac{2}{5} (-\sqrt{s+1} + \sqrt{s+1} + \sqrt{s+1} + \text{جا } \sqrt{s+1}) + \text{ج}$

١٤ (٢٠٢٤) (دور ثاني) جد: $\left[\frac{\text{لوهر (جتاس)}}{\text{جا}^2 \text{س}} \text{ د.س.} \right] \text{ د.س.} \in \text{س}$ ، $\left[\frac{\pi}{2} \right]$

الجواب: $-\text{ظتاس لوهر |جتاس| - س + ج}$

١٥ (٢٠٢٢) (دور ثاني) $\left[\frac{2}{\text{س} - \text{س} (\text{لوهر س})} \text{ د.س.} \right]$

الجواب: $\text{لوهر} - 1 - \text{لوهر (س)} + 1 + \text{لوهر (س)} + \text{ج}$

١٦ (٢٠٢٣) (دور ثاني) $\left[\frac{1}{\text{س} - 2} \text{ د.س.} \right]$ الجواب: $\frac{1}{4} \text{لوهر اس} - 3 - \frac{1}{4} \text{لوهر اس} + 3 + \text{ج}$

١٧ (٢٠٢٣) (دور ثاني) $\left[\text{د.س.} ((\text{س} - 2) \text{ لوهر}) \right]$

الجواب: $\text{س لوهر} (\text{س} - 2) - (\text{س} - 2) \text{ لوهر اس} - 1 + \text{لوهر اس} + 1 + \text{ج}$

١٨ (٢٠٢٣) (دور ثالث) $\left[\frac{\text{س}}{\text{س} + 7} \text{ د.س.} \right]$ الجواب: $-\frac{1}{4} \text{لوهر} (\text{س} + 6) + \frac{1}{4} \text{لوهر} (\text{س}) + \text{ج}$

١٩ (٢٠٢٤) (دور ثاني) $\left[\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 - 7\text{س} + 10} \text{ د.س.} \right]$ الجواب: $\text{لوهر اس} - 2 - 3 \text{لوهر اس} - 5 + \text{ج}$

٢٠ (٢٠٢٤) (دور ثالث) $\left[\text{د.س.} \left(\frac{2 - \text{س}^3}{\text{س}^2 - \text{س} - 2} \right) \right]$

الجواب: $\frac{4}{3} \text{لوهر اس} - 2 + \frac{5}{3} \text{لوهر اس} + 1 + \text{ج}$

